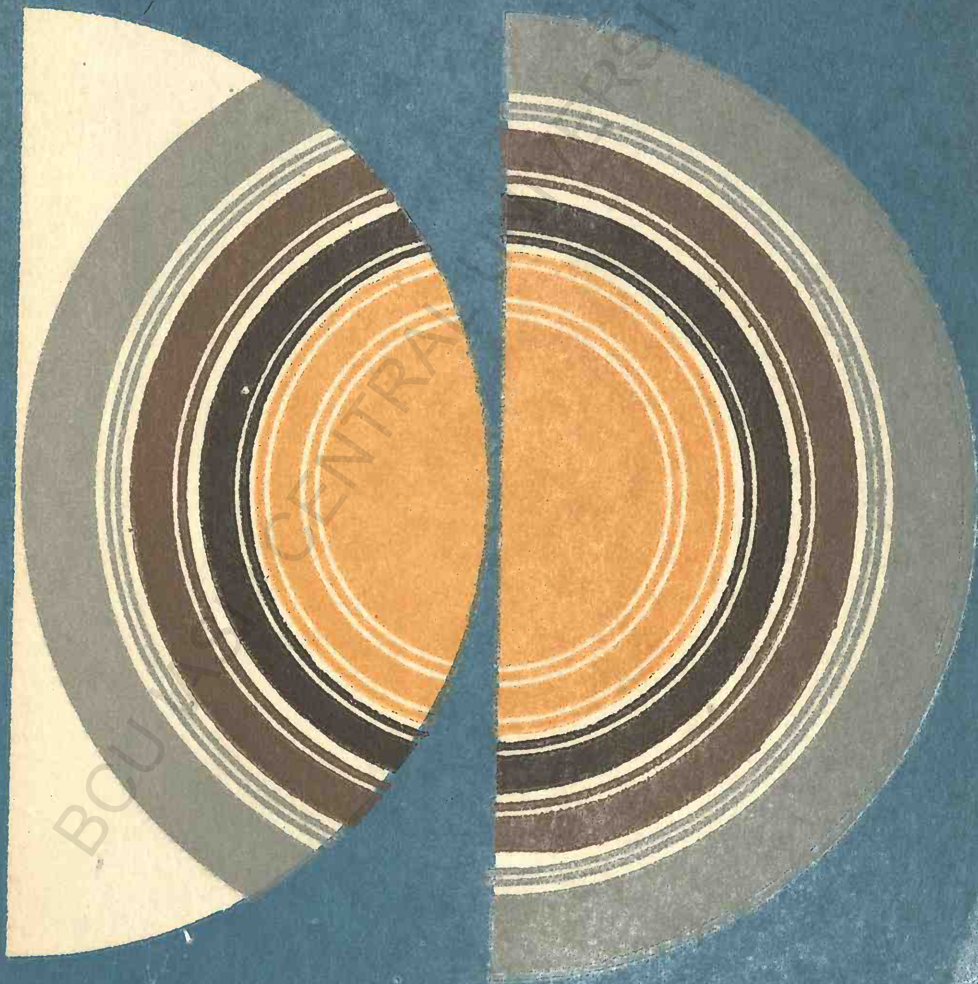
crustei terestre



Termodinamica crustei terestre

«Teoria produce o impresie cu atît mai puternică, cu cît sînt mai simple premisele, cu cît sînt mai diferite obiectele între care stabilește legături și cu cît este mai largă aria ei de aplicabilitate. De aici, puternica impresie pe care a produs-o asupra mea termodinamica clasică. Ea este singura teorie fizică cu conținut universal de care sînt convins că, în limitele aplicabilității noțiunilor ei de bază, nu va fi niciodată răsturnată (spre buna știință a celor care sînt sceptici din principiu).»

ALBERT EINSTEIN

PREFAȚĂ

În etapa actuală a crizei mondiale energetice și de materii prime, se impune cu acuitate cunoașterea proceselor de generare, transformare și regenerare a resurselor energetice și minerale din crusta terestră. Aceste procese pot fi complet determinate, atît global cît și local, numai printr-o interpretare termodinamică adecvată pentru reprezentarea lor corectă, din care trebuie eliminate definitiv metodele și schemele de calcul empirice a căror justificare fizică este insuficient aprofundată.

Termodinamica crustei terestre se prefigurează cu intensitate crescîndă printr-o serie remarcabilă de contribuții științifice dispersate într-o literatură geologică și geofizică din ce în ce mai vastă și mai variată, astfel încît sintetizarea lor într-o concepție unitară cuprinsă în volumul redus al unei singure cărți este imperios necesară pentru toți specialiștii angrenați în cercetarea geologică și în valorificarea resurselor geotermale și minerale. Cu intenția de a sprijini acești specialiști în activitatea lor, Editura tehnică, prin redacția Geologie, m-a încurajat să scriu prezenta carte în care încerc să concentrez rezultate caracteristice ale unui efort susținut de simplificare prin unificare și generalizare pentru desăvîrșirea și aplicarea termodinamicii crustei terestre, în calitate de inginer geolog și doctor inginer în hidraulică subterană, crescut la școala profesorilor Al. Codarcea, G. Murgeanu și Iul. Gavăt în spiritul marilor înaintași ai geologiei românești, cu aureola proprie de știință recunoscută și după ce generația lor a apus. Căutînd să relev eleganța și eficiența termodinamicii crustei terestre, am avut revelația de a găsi răspunsuri la o serie de întrebări extrem de dificile și de actuale pe plan mondial, dintre care se menționează

următoarele: cum se poate reprezenta crusta terestră ca un sistem termodinamic și cum se poate determina starea sa termodinamică; care este interpretarea termodinamică adecvată pentru reprezentarea corectă a proceselor geologice, inclusiv a celor tectonice și structurale; cum se prezintă principiile fundamentale și relațiile termodinamice pentru crusta terestră; cum se propagă căldura și cum se poate evalua fluxul de căldură dinspre sursa magmatică a unui corp intrusiv (dyke, sill, neck, lacolit etc.); care sînt posibilitățile de determinare a hidrotermoconvecției; cum se pot identifica sistemele hidrotermale subterane și cum se poate prevedea comportarea lor în exploatare; care sînt metodele de evaluare a resurselor hidrotermale și cum se poate stabili gradul de încredere în valoarea acestor resurse?

Pe baza informațiilor disponibile pînă în primăvara anului 1982, am reușit să includ în carte unele elemente privind repartiția locală, regională și globală a densității fluxului de termoconducție prin suprafața exterioară a crustei terestre, precum și distribuția resurselor hidrotermale pentru scopuri energetice evaluate pe domeniile unor sisteme hidrotermale de pe teritoriul țării noastre. Totodată, avînd în vedere posibilitățile actuale de creștere a ponderii de participare a resurselor hidrotermale în balanța energetică a țării noastre, am prezentat în carte unele obiective imediate ale cercetării pentru cunoașterea și valorificarea acestor resurse precum și unele măsuri pentru creșterea eficienței economice în valorificarea lor.

Cartea cuprinde reprezentări și scheme de calcul în mare parte inedite, care sînt direct utilizabile pentru rezolvarea problemelor actuale de introducere în circuitul economic a resurselor termale și hidrotermale ale crustei terestre. Pentru aprofundarea înțelegerii chestiunilor de termodinamică și pentru ilustrarea posibilităților de folosire practică a formulelor și schemelor de calcul, în carte sînt incluse 36 de aplicații distribuite cîte 4—6 la fiecare capitol.

Am scris prezenta carte de inițiere, fără îndoială criticabilă și deci perfectibilă, cu speranța că voi reuși să trezesc interesul specialiștilor noștri pentru punerea și rezolvarea problemelor de termodinamică a crustei terestre, într-o asemenea măsură încît să asigure prioritate științei românești într-un domeniu de mare interes pe plan mondial.

AUTORUL

Cuprins

Terrestrial Crust Thermodynamics

The processes of generation, transformation and regeneration of the terrestrial crust energy resources can be, both overall and local, completely determined only by a suitable thermodynamic interpretation, after eliminating the empiric or insufficiently justified from a physical point of view methods and calculation schemes, for a correct representation.

An increasing number of remarkable scientific contributions scattered in a vast and varied geological and geophysical literature are outlining the terrestrial crust thermodynamics. So, a synthesis of the mentioned contributions, worked out in an unitary conception and in the reduced volume of a book for the specialists in the field of geological investigation and capitalization of geothermal resources became peremptorily necessary.

The present book contains the results of an effort made by an engineer geologist, brought up at the school of the professors Al. Codarcea, G. Murgeanu and Iul. Gavăt in the spirit of the great precursors of the Romanian geology, in order to contribute to formation and implementation of the terrestrial crust thermodynamics. Trying to discover the elegance and the efficiency of the terrestrial crust thermodynamics, the reader of this book will find answers concerning important questions, such as: how to represent terrestial crust as a thermodynamic system and how to determine its thermodynamic state, what is the proper thermodynamic interpretation for a correct representation of the geological processes, including tectonical and structural, how to apply to the terrestrial crust the fundamental laws and thermodynamic relationships, how the heat is propagating and which way one can evaluate the heat flow from the magmatic source of an intrusive body (dyke, sill, neck, laccolithe etc.), what are the possibilities to determine the hydrothermoconvection, the way of identification of the underground hydrothermal systems and of forecasting their behaviour, what are the methods for evaluating hydrothermal resources and the possibilities of evaluating the confidence degree for calculated values?

On the basis of the available informations up to the spring of 1982, in the book are included some elements regarding the local, regional and overall repartition of the thermoconduction flow through the external surface of the terrestrial crust as well as the distribution of the hydrothermal resources for energy evaluated on the

domains of some hydrothermal systems on the territory of the Socialist Republic of Romania. At the same time, taking into account the existing possibilities for increasing the weight of hydrothermal resources participation in the world energy balance, the book presents some immediate objectives of the research for the determination and capitalization of these resources as well as some measures for the enhancement of the economic efficiency in their utilization.

The book contains representations and calculation schemes most of them unpublished and directly useful for solving current problems of capitalization of the thermal and hydrothermal resources of the terrestrial crust. For a thorough understanding of the thermodynamic problems and for illustrating the practical use of the solutions and calculation schemes, the book contains also 36 numerical examples, namely 4 – 6 per each chapter.

CONTENTS

Thermodynamique de la croûte terrestre

Les processus de genèse, transformation et régéneration des ressources énergétiques de la croûte terrestre peuvent être complètement déterminés, tant globalement que localement, seulement par une interprétation thermodynamique adéquate pour leur représentation correcte, de laquelle il faut éliminer définitivement les méthodes et les schémas de calcul empiriques dont la justification physique est insuffisamment approfondie.

Par suite, la thermodynamique de la croûte terrestre se préfigure avec intensité croissante par une série remarquable de contributions scientifiques dispersées dans une littérature géologique et géophysique de plus en plus vaste et variée. La synthèse de ces contributions dans une conception unitaire — comprise dans le volume réduit d'un seul livre — est impérieusement nécessaire pour tous les spécialistes travaillant dans la recherche géologique et dans la mise en valeur des ressources géothermales.

Dans ce livre sont présentés les résultats obtenu par un effort soutenu de simplification par unification et généralisation pour l'utilisation de la thermodynamique de la croûte terrestre par un ingénieur géologue formé à l'école des professeurs Al. Codarcea, G. Murgeanu et Iul. Gavăt dans l'esprit des grands précurseurs de la géologie roumaine. Le lecteur du présent livre peut trouver les réponses pour une série de questions extrêmement difficiles et actuelles sur plan mondial, dont on mentionne les suivantes : comment peut-on représenter la croûte terrestre comme un système thermodynamique et comment peut-on déterminer son état thermodynamique, quelle est l'interprétation thermodynamique adéquate pour la représentation correcte des processus géologiques, y compris de ceux tectoniques et structuraux, comment se présentent les principes fondamentaux et les relations thermodynamiques pour la croûte terrestre, comment se propage la chaleur et comment peut-on évaleur le flux de chaleur de la source magmatique d'un corps intrusif (dyke, sill, neck, laccolite etc.), quelles sont les possibilités de déterminer l'hydrothermoconvection, comment peut-on identifier les systèmes hydrothermaux souterrains et comment peut-on prévoir leur comportement pendant l'exploitation, quelles sont les méthodes d'évaluation des ressources hydrothermales et comment peut-on établir le grade de confiance des valeurs de ces ressources ?

Conformément aux informations existantes au printemps de l'année 1982, dans ce livre sont inclus plusieurs éléments concernant la répartitions locale, régionale et globale de la densité du flux de thermoconduction par la surface extérieure de la croûte terrestre ainsi que la distribution des ressources hydrothermales pour buts énergétiques évaluées sur certains systèmes hydrothermaux du territoire de la République Socialiste Romaine. En même temps, en tenant compte des possibilités actuelles d'augmentation du poids de participation des ressources hydrothermales dans la balance énergétique mondiale, l'auteur présente plusieurs objectifs immédiats de la recherche pour la connaissance et la mise en valeur de ces ressources ainsi que plusieurs mesures à prendre pour l'augmentation de l'efficience économique dans leur valorisation.

Le livre comprend les représentations et les schémas de calcul, en grande partie inédits, qui sont directement utilisables pour la solution des problèmes actuels d'introduction dans le circuit économique des ressources thermales et hydrothermales de la croûte terrestre. Pour une compréhension approfondie des questions de thermodynamique et pour illustrer les possibilités d'emploi pratique des formules et des schémas de calcul, on a inclu dans ce livre 36 applications (4—6 applications pour chaque chapitre).

TABLE DES MATIÈRES

Notații

B = factor de neconservativitate pentru propagarea căldurii
c = căldură specifică (masică)
c_p = căldură specifică la presiune constantă
c_ρ = căldură specifică la masă specifică constantă
$\mathcal{F}$ = transformată Fourier
$\mathcal{F}_c$ = transformată Fourier prin cosinus
$\mathcal{F}_s$ = transformată Fourier prin sinus
$\vec{g}$ = accelerație gravitațională
L = lungime de interval
$\mathcal{L}$ = transformată Laplace
M = grosime de strat
m_e = fracțiune ocupată de componente dinamic active din unitatea de volum
P = punct
p = presiune
Q' = flux de căldură
q = densitate a fluxului (flux unitar) de căldură
$\mathcal{q}$ = căldură a unității de masă
R = rază de influență termică
$\vec{r}$ = vector de poziție
$r, r\varphi, z$ = coordonate cilindrice
$r, r\vartheta, r\varphi \sin\vartheta$ = coordonate sferice
T = temperatură
t = timp
$\vec{u}$ = impuls al unității de masă a componentelor dinamic active
V = volum
$\vec{v}$ = viteză de termoconvecție
$\vec{w}$ = viteză de termoconducție
$\mathcal{w}$ = lucru al unității de masă

x, y, z = coordonate carteziene
X_i^j = mărime intensivă
x_j = mărime extensivă sau variabilă generalizată
α = coeficient de dilatație volumică izobară
β = coeficient de compresibilitate izotermă
γ = entalpie liberă (exergie) specifică
ε = energie internă specifică
η = entalpie specifică
θ = creștere a temperaturii față de starea inițială sau de referință
$\varkappa$ = coeficient de conductibilitate termică
μ = productivitate de căldură a unității de volum
π = probabilitate termodinamică
ρ = masă specifică
σ = entropie specifică
υ = tensiune superficială
φ = energie liberă specifică
χ = coeficient de difuzivitate termică
Ω = suprafață
$\mathfrak{a}$ = coeficient de difuzivitate hidraulică a unui acvifer
$\mathfrak{B}$ = factor de neconservativitate pentru curgerea apei subterane
$\mathfrak{h}$ = sarcină (cotă) piezometrică
$\mathfrak{K}$ = coeficient de conductibilitate hidraulică (de filtrație)
$\mathfrak{m}$ = modul de neconservativitate a curgerii apei subterane
$\mathfrak{Q}$ = debit
$\mathfrak{q}$ = debit unitar (pe unitatea de lățime de front) al unui curent acvifer
$\mathfrak{S}$ = coeficient de înmagazinare eficace
$\mathfrak{s}$ = scădere a sarcinii piezometrice față de poziția inițială sau de referință
$\vec{\mathfrak{w}}$ = viteză de transmitere a căldurii
$\sim$ = semn pus deasupra prin care se indică valoarea medie a unei mărimi.

«Astfel fizicienii secolului trecut au abandonat complet ideea unei structuri atomice a luminii. Însă, expulzate de optică, teoriile atomice se admiră de a repurta mari succese nu numai în chimie, în care au dat o interpretare simplă legilor proporţiilor definite, dar şi în fizica materiei, în care au permis să se interpreteze numeroase proprietăţi ale corpurilor solide, lichide sau gazoase. Ele au îngăduit mai ales să se construiască admirabila teorie cinetică a gazelor care, generalizată sub numele de „mecanică statistică", a permis să se dea un sens clar conceptelor abstracte ale termodinamicii».

LOUIS DE BROGLIE

1. Sistemul termodinamic al crustei terestre

1.1. Originea căldurii

Crusta terestră dispune de o importantă cantitate de căldură întreţinută prin participarea energiei radiate de soare, a energiei primite din domeniul subcrustal şi a energiei conţinute în interiorul ei însăşi (Chapman şi Pollack, 1975; Lister, 1977; Pollack şi Chapman, 1977; Lăzărescu, 1980).

Căldura radiată de soare într-o secundă este de ordinul a 10^{23}J, din care numai cca $1,7 \cdot 10^{17}$J ajunge, cu o întîrziere de aproximativ 8,3 minute faţă de momentul emiterii, să fie interceptată de planeta noastră. Din această căldură interceptată într-o secundă, cca $0,7 \cdot 10^{17}$ J revine direct în spaţiul cosmic datorită reflexiei la incidenţa cu extremitatea exterioară a atmosferei, iar restul de cca $1,0 \cdot 10^{17}$J pătrunde în atmosferă, în hidrosferă şi în partea superficială a crustei terestre.

Căldura domeniului subcrustal este remanentă din etapa pregeologică de evoluţie a planetei noastre (Lubimova, 1958; MacDonald, 1959; Tozer, 1965) şi provenită, cel puţin parţial, prin dezintegrare radioactivă, bombardare meteoritică şi compactare gravitaţională (Lăzărescu, 1980). Această căldură remanentă în domeniul

subcrustal este distribuită în nucleu (centrosferă), în mantaua inferioară (mezosferă) şi în mantaua superioară. În cadrul mantalei superioare constituite din roci ultrabazice cvasitopite în astenosferă (zonă de viteză redusă a undelor seismice) şi cvasisolide în litosfera inferioară (fig. 1.1), propagarea căldurii se realizează atît prin con-

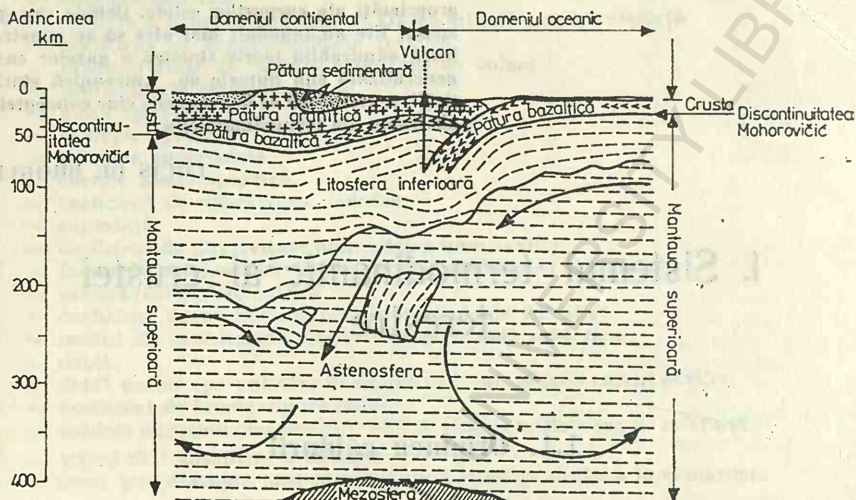


Fig. 1.1. Secţiune schematică prin mantaua superioară şi prin crusta terestră

ducţie cît şi prin convecţie, determinînd fie sucţiunea locală şi digerarea crustei (litosferei superioare), fie străpungerea ei prin magmatism şi vulcanism, iar la nivelul marginii exterioare a mantalei marcate prin discontinuitatea Mohorovičić, transferul de energie asigură încălzirea ascendentă a crustei cu intensitate remarcabilă prin dorsalele medio-oceanice, bazinele marginale, arcurile insulare vulcanice, unităţile structurale afectate de «diapirism» al mantalei etc. (Cloos, 1939; Vening Meinesz, 1950; Artemjev şi Artyushkov, 1971; Sleep, 1971; Asmus şi Ponte, 1973; Burke şi Whiteman, 1973; Andrews şi Sleep, 1974; Dewey şi Burke, 1974; Falvey, 1974; Karig, 1974; Siesser et al., 1974; Bolli şi Ryan, 1975; Kinsman, 1975; McKenzie şi Weiss, 1975; Burke, 1976; Rădulescu, 1976; Sleep şi Snell, 1976; Davis şi Lister, 1977; Lister, 1977; Pollack şi Chapman, 1977; Adám, 1978; Uyeda, 1978; Chapman et al., 1979; Horváth et al., 1979; Bott, 1981; Bridwell şi Potzick, 1981; Duncan, 1981; Hsui şi Toksöz, 1981; Jurdy, 1981; Zonenshain şi Savostin, 1981).

Căldura generată în interiorul crustei terestre provine din alte forme de energie (Kappelmeyer, 1979) în procesele care se desfășoară pe domeniul continental în păturile bazaltică, granitică și sedimentară, iar pe domenînl oceanic în păturile bazaltică și sedimentară (MacDonald, 1963; Forsyth și Press, 1971; Wyllie, 1971; Herrin, 1972; MacGregor și Basu, 1974; Forsyth, 1975; Mercier și Carter, 1975; Lubimova et al., 1976; Murrell, 1976; Lăzărescu, 1980). La generarea de căldură în crusta terestră participă preponderent energia nucleară (Pollack și Chapman, 1977) prin dezintegrarea elementelor radioactive din roci (uraniul, thoriul, radiul etc. (Socolescu et al., 1975; Lăzărescu, 1980) al căror echivalent în radiu are concentrația de cca $1{,}0 \cdot 10^{-14}$ % în pătura bazaltică, de cca $3{,}0 \cdot 10^{-14}$ % în pătura granitică și de cca $1{,}5 \cdot 10^{-14}$% în pătura sedimentară) și energia mecanică prin solicitarea stereomecanică sau reomecanică la care sînt supuse rocile (compactarea litostatică, mișcarea și rearanjarea plăcilor și blocurilor tectonice, curgerea magmelor și fluidelor etc.), iar subordonat energia chimică prin transformarea exotermă a rocilor, energia electrică și energia magnetică prin propagarea electrocurenților și cîmpurilor electric și magnetic în roci etc.

În principal, căldura crustei terestre rezultă din compunerea unui fond de origine subcrustală cu un supliment de origine intracrustală (Čermák, 1979; Chapman et al., 1979).

1.2. Starea termodinamică

Crusta terestră este un *sistem termodinamic eterogen* (cu componente solide, lichide și gazoase (Kappelmeyer, 1968, 1979)) care se poate caracteriza prin intermediul unor mărimi $z = z(x, y)$ univoc determinate pentru fiecare stare corespunzătoare valorilor unei perechi de variabile independente x și y, ținînd seamă că variațiile elementare $dz = (\partial z/\partial x)dx + (\partial z/\partial y)dy$ reprezintă diferențiale totale exacte și deci $\partial(\partial z/\partial x)/\partial y = \partial(\partial z/\partial y)/\partial x$. Pentru orice porțiune a crustei terestre, aceste mărimi de stare se corelează potrivit unei ecuații de stare $f(x, y, z) = 0$ a cărei formă explicită este dificil de determinat și generalizat, datorită complexității și diversității interacțiunii rezultante a particulelor componente, adică respingerii și atracției reciproce prin intermediul forțelor interatomice

şi intermoleculare (Săndulescu, 1965; Born, 1969; Landau şi Lifchitz, 1969a) în condiţiile agitaţiei lor termice corespunzătoare stării locale a sistemului. Cîmpul forţelor de interacţiune a particulelor derivă dintr-un potenţial rezultat prin suprapunerea unor potenţiale preponderent newtoniene $U = -a/\mathrm{r}$ asociate fiecărei particule (Săndulescu, 1965; Spacu şi Săndulescu, 1966; Landau şi Lifchitz, 1970; Arnold, 1976), unde coeficientul a este invariabil cu distanţa r faţă de centrul particulei. Aplicînd teorema mediei a calculului integral pe distanţa r, se obţine potenţialul mediu

$$\tilde{U} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int_0^{\mathrm{r}} U\,\mathrm{dr}$$

corespunzător ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{r}\tilde{U})}{\mathrm{dr}} = U \qquad (1.1)$$

preluate, pentru $U = -a/\mathrm{r}$, sub forma

$$\mathrm{d}(\mathrm{r}\tilde{U}) = -\frac{a}{\mathrm{r}}\,\mathrm{dr} \qquad (1.2)$$

din care se deduce soluţia

$$\tilde{U} = \frac{b - a\ln \mathrm{r}}{\mathrm{r}}. \qquad (1.3)$$

Întrucît derivata

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{dr}} = -\frac{b + a(1 - \ln \mathrm{r})}{\mathrm{r}^2}$$

se anulează pentru $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$, adică

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{dr}}\right)_{\mathrm{r}=\mathrm{r}_0} = 0$$

şi implicit

$$b = -a(1 - \ln \mathrm{r}_0), \qquad (1.4)$$

urmează că potenţialul $\tilde{U}$ se defineşte, conform soluţiei (1.3), prin expresia

$$\tilde{U} = -\frac{a}{\mathrm{r}}\left(1 + \ln\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_0}\right) \qquad (1.5)$$

sau

$$\tilde{U} = -\frac{a}{\mathrm{r}}\left(1 - \ln\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}}\right).$$

Pentru $0 < (\mathrm{r}_0/\mathrm{r}) \leqslant 2$, unde $\mathrm{r} > 0$, $\ln(\mathrm{r}_0/\mathrm{r})$are dezvoltarea în serie

$$\ln\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\mathrm{r}_0-\mathrm{r})^n}{n\mathrm{r}^n}$$

și deci potențialul $\tilde{U}$ se poate exprima sub forma

$$\tilde{U} = -\frac{a}{\mathrm{r}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a(\mathrm{r}_0 - \mathrm{r})^n}{n \cdot \mathrm{r}^{n+1}} \qquad (1.6)$$

prin care se generalizează formele particulare ale potențialelor cunoscute pentru interacțiunea particulelor (Săndulescu, 1965 ; Spacu și Săndulescu, 1966 ; Landau și Lifchitz, 1969 b). Variația în spațiu a potențialului $\tilde{U}$ determină interacțiunea particulelor printr-o forță rezultantă a cărei intensitate $\tilde{F} = -\,\mathrm{d}\tilde{U}/\mathrm{dr}$ depinde de distanța r potrivit funcției

$$\tilde{F} = -\frac{a}{\mathrm{r}^2}\ln\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}_0} \qquad (1.7)$$

reprezentate grafic în figura 1.2. După cum distanța r dintre particule este mai mică sau mai mare decît r_0, forța de interacțiune este de respingere ($\tilde{F} > 0$) sau respectiv de atracție ($\tilde{F} < 0$). Respingerea este cea mai intensă pentru $\mathrm{r} \to 0$ unde $\tilde{F} \to +\infty$, iar atracția este cea mai intensă pentru $\mathrm{r} = \sqrt{e}\,\mathrm{r}_0 \approx 1{,}64872\ \mathrm{r}_0$ unde $\tilde{F} = -\,a/(2\,e\,\mathrm{r}_0^2) \approx -\,0{,}18394\ a/\mathrm{r}_0^2$. Dacă particulele se găsesc una față de alta la distanța r_0 unde forța de interacțiune se anulează, atunci ele se ordonează într-o rețea regulată caracteristică fiecărei substanțe, formînd un *solid cu structură cristalină* în care agitația termică se manifestă numai prin oscilații ale fiecărei particule în jurul poziției sale de echilibru (nodului rețelei) corespunzătoare energiei potențiale minime (Born, 1915, 1969 ; Bragg și Bragg, 1934 ; Seitz, 1940 ; Rice și Teller, 1949 ; Wyckoff, 1953 ; Born și Kun-Huang, 1954 ; Hume-Rothery, 1954 ; Ziman, 1964). Dacă distanța dintre particule este mai mare decît r_0 și atracția reciprocă se men-

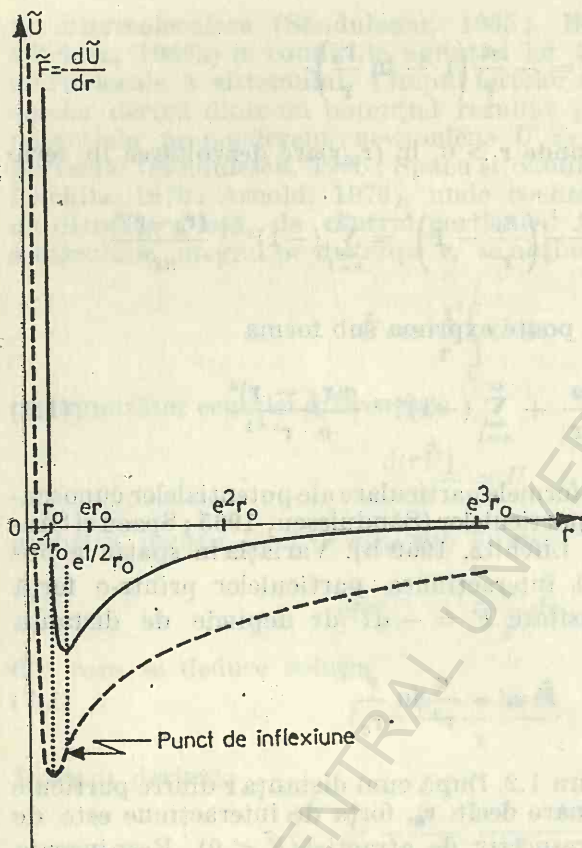


Fig. 1.2. Reprezentarea grafică a potențialului $\tilde{U}$ și forței $\tilde{F} = -\,d\tilde{U}/dr$ de interacțiune a particulelor în funcție de distanța r dintre ele

ține îndeajuns de intensă, atunci ele se pot aranja regulat numai în cadrul unor formațiuni restrînse moleculare sau macromoleculare dar nu și în cadrul ansamblului acestor formațiuni, constituind un *solid cu structură amorfă* sau un *lichid* în care agitația termică se realizează atît prin oscilațiile fiecărei particule în jurul poziției sale de echilibru într-o formațiune moleculară sau macromoleculară cît și prin deplasările dezordonate ale formațiunilor (Cowper, 1926; Born și Green, 1947; Flory, 1960; Nenițescu, 1960; Spacu și Săndulescu, 1966; Landau și Lifchitz, 1969 a, 1971). În sfîrșit, dacă distanța dintre particule este cu mult mai mare decît r_0 și atracția reciprocă se resimte foarte slab, atunci ele nu se mai pot aranja

regulat, formînd un *gaz* în care agitaţia termică se manifestă aproape integral prin mişcări moleculare dezordonate (Chapman şi Cowling, 1952 ; Carleman, 1957 ; Choh şi Uhlenbeck, 1958 ; Martin şi Schwinger, 1959 ; Landau şi Lifchitz, 1971 ; Kikoïne şi Kikoïne, 1979). Aşadar, starea oricărei porţiuni a crustei terestre poate fi caracterizată prin densitatea, agitaţia termică şi interacţiunea particulelor componente sub influenţa atît a forţelor exterioare porţiunii considerate cît şi a celor interioare datorite transformării reciproce a diferitelor forme de energie intracrustală, adică respectiv prin *masa specifică medie* $\tilde{\rho}$, *temperatura* T şi *efortul unitar mediu sau presiunea medie* $\tilde{p}$ definite ca funcţii de timp şi de punct în domeniul crustei terestre.

1.3. Ecuaţia termică de stare

Masa specifică medie $\tilde{\rho}$, temperatura T şi efortul unitar mediu sau presiunea medie $\tilde{p}$ sînt corelate prin *ecuaţia termică de stare*

$$f(\tilde{\rho},\ T,\ \tilde{p}) = 0 \tag{1.8}$$

care mai poate fi scrisă sub formele

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(T, \tilde{p}),$$

$$T = T(\tilde{p}, \tilde{\rho})$$

sau

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{\rho}, T).$$

Deoarece $\tilde{\rho}$, T şi $\tilde{p}$ sînt mărimi de stare, variaţiile lor elementare

$$\mathrm{d}\tilde{\rho} = \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T} \mathrm{d}\tilde{p},$$

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}\tilde{p} + \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} \mathrm{d}\tilde{\rho}$$

şi

$$\mathrm{d}\tilde{p} = \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T} \mathrm{d}\tilde{\rho} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}T$$

reprezintă diferenţiale totale exacte. Dacă se menţine constantă cîte una din cele trei mărimi termice de stare, adică $\mathrm{d}\tilde{\rho} = 0$ sau

$\mathrm{d}T = 0$ sau $\mathrm{d}\tilde{p} = 0$, atunci sistemul egalităţilor anterioare se reduce respectiv la cîte una din formele particulare

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} \mathrm{d}T = -\left(\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{p} \\ \mathrm{d}T = \left(\dfrac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}\tilde{p} \\ \mathrm{d}\tilde{p} = \left(\dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}T \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\rho} = \left(\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{p} \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}\tilde{p} = -\left(\dfrac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} \mathrm{d}\tilde{\rho} \\ \mathrm{d}\tilde{p} = \left(\dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{\rho} \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\rho} = \left(\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} \mathrm{d}T \\ \mathrm{d}T = \left(\dfrac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} \mathrm{d}\tilde{\rho} \\ \left(\dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{\rho} = -\left(\dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}T \end{cases}$$

cărora le corespunde una şi aceeaşi relaţie:

$$\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} = -1. \tag{1.9}$$

Prin urmare, variațiile celor trei mărimi termice de stare nu pot fi independente una față de alta. Reluînd relația (1.9) sub forma

$$\left[-\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\right]\frac{1}{\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_{T}}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}=1$$

și evidențiind astfel *coeficientul de dilatație volumică izobară*

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}=\tilde{\alpha}, \tag{1.10}$$

coeficientul de compresibilitate izotermă

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_{T}=\tilde{\beta} \tag{1.11}$$

și implicit raportul lor

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}=\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}, \tag{1.12}$$

se pot transcrie diferențialele mărimilor termice de stare cu expresiile

$$\mathrm{d}\tilde{\rho}=-\tilde{\alpha}\tilde{\rho}\,\mathrm{d}T+\tilde{\beta}\tilde{\rho}\,\mathrm{d}\tilde{p}, \tag{1.13}$$

$$\mathrm{d}T=\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\mathrm{d}\tilde{p}-\frac{1}{\tilde{\alpha}\tilde{\rho}}\mathrm{d}\tilde{\rho} \tag{1.13'}$$

și

$$\mathrm{d}\tilde{p}=\frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}}\mathrm{d}\tilde{\rho}+\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\mathrm{d}T\cdot \tag{1.13''}$$

Întrucît $\mathrm{d}\tilde{\rho}$, $\mathrm{d}T$ și $\mathrm{d}\tilde{p}$ reprezintă diferențiale totale exacte, urmează că sînt satisfăcute egalitățile

$$\left[\frac{\partial(-\tilde{\alpha}\tilde{\rho})}{\partial\tilde{p}}\right]_{T}=\left[\frac{\partial(\tilde{\beta}\tilde{\rho})}{\partial T}\right]_{\tilde{p}},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)\right]_{\tilde{p}}=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left(-\frac{1}{\tilde{\alpha}\tilde{\rho}}\right)\right]_{\tilde{\rho}}$$

și

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}}\right)\right]_{\tilde{\rho}}=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\right)\right]_{T}$$

din care rezultă respectiv:

$$-\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\tilde{p}}\right)_T=\left(\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}, \qquad (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}=\frac{1}{\tilde{\alpha}\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} \qquad (1.15)$$

şi

$$-\frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}=\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T-\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\left(\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T. \qquad (1.16)$$

Valorile coeficienţilor de dilataţie volumică izobară şi de compresibilitate izotermă (vezi tabelele 1.1, 1.2 şi 1.3) depind de temperatură şi de presiune, dar, conform relaţiei (1.14), variaţia izotermă a primului în raport cu $\tilde{p}$ şi variaţia izobară a celui de-al doilea în raport cu T se anulează reciproc, astfel încît, pentru un proces oarecare desfăşurat în crusta terestră între o stare iniţială $(\tilde{\rho}_0, T_0, \tilde{p}_0)$ şi o stare ulterioară $(\tilde{\rho}, T, \tilde{p})$, ecuaţia diferenţială (1.13) se integrează sub forma

$$\ln\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}=-\int_{T_0}^{T}\tilde{\alpha}\,\mathrm{d}T+\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}}\tilde{\beta}\,\mathrm{d}\tilde{p} \qquad (1.17)$$

corespunzătoare ecuaţiei generale termice de stare

$$\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_0\exp\left(-\int_{T_0}^{T}\tilde{\alpha}\,\mathrm{d}T+\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}}\tilde{\beta}\,\mathrm{d}\tilde{p}\right). \qquad (1.18)$$

Deoarece pe intervalul de integrare $\tilde{\alpha}$ şi $\tilde{\beta}$ se prezintă ca funcţii continue de T şi respectiv de $\tilde{p}$, urmează, potrivit teoremei mediei a calculului integral, că există o valoare T^* cuprinsă între T_0 şi T şi o valoare $\tilde{p}^*$ cuprinsă între $\tilde{p}_0$ şi $\tilde{p}$ pentru care sînt satisfăcute egalităţile

$$\int_{T_0}^{T}\tilde{\alpha}(T)\,\mathrm{d}T=(T-T_0)\tilde{\alpha}(T^*)=(T-T_0)\tilde{\alpha}_{med}$$

şi

$$\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}}\tilde{\beta}(\tilde{p})\,\mathrm{d}\tilde{p}=(\tilde{p}-\tilde{p}_0)\tilde{\beta}(\tilde{p}^*)=(\tilde{p}-\tilde{p}_0)\tilde{\beta}_{med}.$$

Tabelul 1.1.

Valorile medii ale coeficientului de dilatație volumică izobară [1/°K] pentru unele substanțe componente ale crustei terestre (după Hütte — Manuel de l'Ingénieur, t. I, 1920; Vlădea, 1965)

Intervalul de temperatură (°K)	Substanța							
	Silice	Corindon	Calcar	Platină	Aur	Cupru	Argint	Petrol
273,15— 373,15	0,0000015		0,0000240	0,0000270	0,0000426	0,0000495	0,0000585	0,0010000
273,15— 473,15	0,0000036	0,0000390		0,0000549	0,0000876	0,0001014	0,0001200	
273,15— 573,15	0,0000057	0,0000600		0,0000834	0,0001332	0,0001545	0,0001824	
273,15— 673,15	0,0000075	0,0000825		0,0001128	0,0001803	0,0002121	0,0002469	
273,15— 773,15	0,0000093	0,0001080		0,0001431	0,0002286	0,0002712	0,0003135	
273,15— 873,15	0,0000108	0,0001335		0,0001740	0,0002805	0,0003327	0,0003810	
273,15— 973,15	0,0000120	0,0001590		0,0002058	0,0003345		0,0004545	
273,15—1073,15	0,0000135	0,0001875		0,0002382	0,0003900		0,0005295	
273,15—1173,15	0,0000150	0,0002145		0,0002715	0,0004470			
273,15—1273,15	0,0000162	0,0002445		0,0003057				
273,15—1373,15		0,0002745						
273,15—1473,15		0,0003045						
273,15—1573,15		0,0003345						
273,15—1673,15		0,0003645						
273,15—1773,15		0,0003945						

Tabelul 1.2.

Valorile medii ale coeficientului de compresibilitate izotermă, pe intervalul de presiune cuprins între $0{,}980665 \cdot 10^5 N/m^2 = 1$ at şi $490{,}3325 \cdot 10^5 N/m^2 = 500$ at, pentru unele substanţe componente ale crustei terestre

Denumirea substanţei	Coeficientul de compresibilitate (10^{-10} m^2/N)	Sursa de informaţie
Cuarţ	0,255	Adams şi Wiliamson (1923)
Granit	0,340–0,425	Bach(1900)
	0,790–0,796	Bach (1903)
	0,233	Hütte (1920)
	0,208	Voinea (1966)
Marmură	0,182	Voinea 1966)
Calcar	0,243	Voinea (1966)
Gresie	1,088–4,856	Bach (1900)
	0,414–0,443	Bach (1903)
	1,122–2,243	Creţu et al. (1966)
de Kliwa	0,204–1,020	Penescu et al. (1965)
Marnă	0,486	Hütte (1920)
	0,566	Voinea (1966)
Nisip îndesat	1,835	Albu (1971)
	***	
Gheaţă	2,266–2,549	Voinea (1966)

Tabelul 1.3.

Valorile coeficienţilor de dilataţie volumică izobară şi de compresibilitate izotermă pentru apă în funcţie de temperatură (după Hütte–Manuel de l'Ingénieur, t.I, 1920; Pop şi Pislăraşu, 1969)

Temperatura (°K)	Coeficientul de dilataţie (1/°K)	Coeficientul de compresibilitate ($10^{-10} m^2/N$)
273,15	–0,00007	5,12
277,13	0,00000	5,04
283,15	0,00009	4,92
293,15	0,00021	4,74
303,15	0,00030	4,65
313,15	0,00037	4,35
333,15	0,00052	4,16
353,15	0,00064	4,23
373,15	0,00074	4,38

Prin intermediul valorilor medii

$$\tilde{\alpha}_{med} = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^{T} \tilde{\alpha}(T)\,\mathrm{d}T \tag{1.19}$$

și

$$\tilde{\beta}_{med} = \frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_0} \int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}} \tilde{\beta}(\tilde{p})\,\mathrm{d}\tilde{p} \tag{1.20}$$

ecuația termică de stare se poate scrie sub formele

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \exp[-\tilde{\alpha}_{med}(T - T_0) + \tilde{\beta}_{med}(\tilde{p} - \tilde{p}_0)], \tag{1.21}$$

$$T = T_0 + \frac{\tilde{\beta}_{med}(\tilde{p} - \tilde{p}_0) - \ln(\tilde{\rho}/\tilde{\rho}_0)}{\tilde{\alpha}_{med}} \tag{1.21'}$$

și

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \frac{\ln(\tilde{\rho}/\tilde{\rho}_0) + \tilde{\alpha}_{med}(T - T_0)}{\tilde{\beta}_{med}} \tag{1.21''}$$

în care $\tilde{\alpha}_{med}$ și $\tilde{\beta}_{med}$ sînt constante pe intervalul de integrare.

În cazurile transformărilor simple izocore ($\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$), izoterme ($T = T_0$) și izobare ($\tilde{p} = \tilde{p}_0$), ecuația termică de stare se particularizează respectiv:

$$T = T_0 + \frac{\tilde{\beta}_{med}}{\tilde{\alpha}_{med}}(\tilde{p} - \tilde{p}_0) \tag{1.22}$$

sau

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \frac{\tilde{\alpha}_{med}}{\tilde{\beta}_{med}}(T - T_0), \tag{1.22'}$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \frac{1}{\tilde{\beta}_{med}} \ln \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \tag{1.23}$$

sau

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 e^{\tilde{\beta}_{med}(\tilde{p} - \tilde{p}_0)} \tag{1.23'}$$

și

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 e^{-\tilde{\alpha}_{med}(T - T_0)} \tag{1.24}$$

sau

$$T = T_0 - \frac{1}{\tilde{\alpha}_{med}} \ln \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}. \tag{1.24'}$$

1.4. Interpretarea termodinamică a unor procese geologice

Potrivit ecuației generale termice de stare, prin procesele care se desfășoară în crusta terestră se pot produce atît destinderi ($\tilde{p} < \tilde{p}_0$), cît și comprimări ($\tilde{p} > \tilde{p}_0$) ale rocilor, după cum

$$\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}} \tilde{\beta}\, d\tilde{p} < \int_{T_0}^{T} \tilde{\alpha}\, dT \quad \text{sau} \quad \tilde{\beta}_{med}(\tilde{p} - \tilde{p}_0) < \tilde{\alpha}_{med}(T - T_0)$$

și respectiv

$$\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}} \tilde{\beta}\, d\tilde{p} > \int_{T_0}^{T} \tilde{\alpha}\, dT \quad \text{sau} \quad \tilde{\beta}_{med}(\tilde{p} - \tilde{p}_0) > \tilde{\alpha}_{med}(T - T_0).$$

Dacă prin procesele din porțiunile eterogene ale crustei terestre, în care sînt în contact roci cu proprietăți diferite, se produc simultan destinderi ale unor roci și comprimări ale altor roci adiacente, atunci în vecinătățile suprafețelor de separație dintre ele apar eforturi de sens contrar (fig. 1.3) generatoare de fisuri, fracturi, falii și cute.

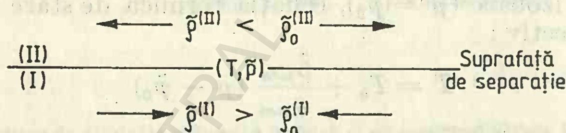


Fig. 1.3. Reprezentarea eforturilor de sens contrar din vecinătățile suprafeței de separație dintre o rocă comprimată (*I*) și o rocă destinsă (*II*)

În cazul proceselor desfășurate în geosinclinale în care se îndeplinește condiția

$$\frac{\tilde{p} - \tilde{p}_0}{T - T_0} < \frac{\tilde{\alpha}_{med}}{\tilde{\beta}_{med}},$$

sedimentele în ansamblu sînt destinse, astfel încît pot forma cute (fig. 1.4) asociate cu falii.

Prin procesele din bazinele sedimentare, în care este satisfăcută condiția

$$\frac{\tilde{p} - \tilde{p}_0}{T - T_c} > \frac{\tilde{\alpha}_{med}}{\tilde{\beta}_{med}},$$

se produc comprimări ale umpluturilor sedimentare și implicit aranjări ale acestora în sinclinale largi (fig. 1.5) eventual fracturate.

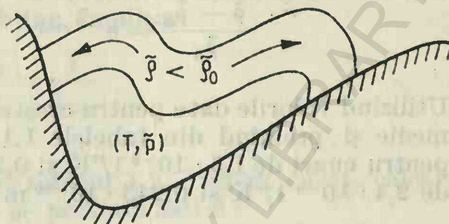


Fig. 1.4. Reprezentarea schematică a formării cutelor prin destinderea sedimentelor dintr-un geosinclinal

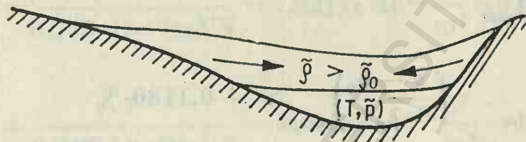


Fig. 1.5. Reprezentarea schematică a formării unui sinclinal larg prin comprimarea umpluturii sedimentare a unui bazin

În cadrul proceselor de activare geotermică a unor unități structurale, destinderile datorite creșterii de temperatură (Wang, 1965) sînt preponderente față de comprimările datorite creșterii de presiune, astfel încît pot apare fracturi și crăpături adînci în formațiunile geologice prin care pătrunde ascendent magmă generatoare de corpuri subvulcanice și de produse vulcanice.

Se conchide că procesele care se desfășoară în crusta terestră pot fi determinate complet, atît global cît și local, numai printr-o interpretare termodinamică adecvată pentru reprezentarea lor corectă.

1.5. Aplicații

1.5.1. Să se calculeze variațiile relative ale maselor specifice medii ale cuarțului și calcarului pe intervalul de adîncime cuprins între 0 m și 2000 m în crusta terestră, știind că temperatura și presiunea medie prezintă creșteri de 60°K și respectiv de $5 \cdot 10^7 N/m^2$.

Rezolvare. Potrivit ecuației termice de stare (1.21), variația relativă a masei specifice medii se exprimă sub forma

$$\frac{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0}=e^{-\tilde{\alpha}_{med}(T-T_0)+\tilde{\beta}_{med}(\tilde{p}-\tilde{p}_0)}-1.$$

Utilizînd valorile date pentru creșterile de temperatură și de presiune medie și preluînd din tabelele 1.1 și 1.2 valorile medii $\tilde{\alpha}_{med}$ și $\tilde{\beta}_{med}$ pentru cuarț de $1{,}5\cdot10^{-6}$ 1/°K și $0{,}255\cdot10^{-10}$ m²/N, iar pentru calcar de $2{,}4\cdot10^{-5}$ 1/°K și $0{,}243\cdot10^{-10}$ m²/N, rezultă că

$$\left(\frac{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0}\right)_{cuar}=e^{-1{,}5\cdot10^{-6}\cdot60+0{,}255\cdot10^{-10}\cdot5\cdot10^{7}}-1\approx+0{,}001186$$

sau

$$\left(\frac{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0}\right)_{cuarț}\approx+0{,}1186\ \%$$

și

$$\left(\frac{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0}\right)_{calcar}=e^{-2{,}4\cdot10^{-5}\cdot60+0{,}243\cdot10^{-10}\cdot5\cdot10^{7}}-1\approx-0{,}000225$$

sau

$$\left(\frac{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0}\right)_{calcar}\approx-0{,}0225\ \%.$$

1.5.2. Să se determine condiția de transformare izocoră a cuarțului și calcarului.

Rezolvare. Din ecuația de stare (1.22) sau (1.22′) corespunzătoare transformării izocore se deduce imediat condiția

$$\frac{\tilde{p}-\tilde{p}_0}{T-T_0}=\frac{\tilde{\alpha}_{med}}{\tilde{\beta}_{med}}.$$

Preluînd din tabelele 1.1 și 1.2, ca și în aplicația precedentă, valorile medii $\tilde{\alpha}_{med}$ și $\tilde{\beta}_{med}$ pentru cuarț și pentru calcar, se găsește că

$$\left(\frac{\tilde{p}-\tilde{p}_0}{T-T_0}\right)_{cuarț}=\frac{1{,}5\cdot10^{-6}\,1/°\mathrm{K}}{0{,}255\cdot10^{-10}\,\mathrm{m^2/N}}\approx0{,}5882\cdot10^{5}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2\cdot°K}}\approx0{,}6000\,\frac{\mathrm{at}}{°\mathrm{K}}$$

și

$$\left(\frac{\tilde{p}-\tilde{p}_0}{T-T_0}\right)_{calcar}=\frac{2{,}4\cdot10^{-5}\,1/°\mathrm{K}}{0{,}243\cdot10^{-10}\,\mathrm{m^2/N}}\approx9{,}8765\cdot10^{5}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2\cdot°K}}\approx10{,}0712\,\frac{\mathrm{at}}{°\mathrm{K}}.$$

1.5.3. Pe intervalul de presiune cuprins între $0{,}980665 \cdot 10^5$ $\mathrm{N/m^2} = 1$ at și $490{,}3325 \cdot 10^2 \mathrm{N/m^2} = 500$ at, să se stabilească condiția de transformare izotermă a cuarțului, calcarului și nisipului îndesat.

Rezolvare. În cazul transformării izoterme, din ecuația de stare (1.23) sau (1.23′) se obține condiția

$$\frac{\tilde{p} - \tilde{p}_0}{\ln \dfrac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}} = \frac{1}{\tilde{\beta}_{med}}$$

cu valorile medii $\tilde{\beta}_{med}$ înscrise în tabelul 1.2. Pentru cuarț, calcar și nisip îndesat, această condiție se prezintă astfel:

$$\left(\frac{\tilde{p} - \tilde{p}_0}{\ln \dfrac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}}\right)_{cuarț} = \frac{1}{0{,}255 \cdot 10^{-10} \mathrm{m^2/N}} = 3{,}92157 \cdot 10^{10} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 3{,}99889 \cdot 10^5 \mathrm{at},$$

$$\left(\frac{\tilde{p} - \tilde{p}_0}{\ln \dfrac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}}\right)_{calcar} = \frac{1}{0{,}243 \cdot 10^{-10} \mathrm{m^2/N}} = 4{,}11523 \cdot 10^{10} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 4{,}19636 \cdot 10^5 \mathrm{at}$$

și

$$\left(\frac{\tilde{p} - \tilde{p}_0}{\ln \dfrac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}}\right)_{nisip\ îndesat} = \frac{1}{1{,}835 \cdot 10^{-10} \mathrm{m^2/N}} = 0{,}54496 \cdot 10^{10} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 0{,}55570 \cdot 10^5 \mathrm{at}.$$

1.5.4. Pe intervalul de temperatură cuprins între 273,15°K și 373,15°K, să se determine condiția de transformare izobară a silicei și calcarului.

Rezolvare. Pentru transformarea izobară, din ecuația de stare (1.24) sau (1.24′) rezultă condiția

$$\frac{T - T_0}{\ln \dfrac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}}} = \frac{1}{\tilde{\alpha}_{med}}.$$

Preluînd din tabelul 1.1 valorile medii $\tilde{\alpha}_{med}$ pentru silice și pentru calcar, se deduce că

$$\left(\frac{T - T_0}{\ln \dfrac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}}}\right)_{silice} = \frac{1}{0{,}15 \cdot 10^{-5}} \mathrm{°K} = 6{,}66667 \cdot 10^5 \mathrm{°K}$$

şi

$$\left(\frac{T - T_0}{\ln \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}}}\right)_{calacr} = \frac{1}{2{,}40 \cdot 10^{-5}} \,{}^\circ K = 0{,}41667 \cdot 10^5 \,{}^\circ K.$$

Bibliografie

ÁDÁM, A. (1978). *Geothermal effects in the formation of electrically conducting zones and temperature distribution in the earth,* Phys. Earth Planet. Int. 17, p. 21—28.

ADAMS, S. H., WILIAMSON, E. D. (1923). *The compressibility of minerals and rocks at high pressures,* Carnegie, Just. Geophys. Laboratory, Paper 484, J. Franklin Inst., 195, p. 475—529.

ALBU, M. (1971). *Contribuţii la determinarea capacităţii de înmagazinare a apei în medii poroase,* Hidrotehnica, vol. 16, nr. 8, p. 424—428, Bucureşti.

ANDREWS, D. J., SLEEP, N. H. (1974), *Numerical modelling of tectonic flow behind island arcs,* Geophys. J. R. Astron. Soc. 38, p. 237—251.

ARNOLD, V. (1976), *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* (traduit du russe), Chap. 2, *Équations de mouvement,* p. 39—57, Éditions Mir, Moscou.

ARTEMJEV, M. E., ARTYUSHKOV, E. V. (1971). *Structure and isostasy of the Baikal rift and the mechanism of rifting,* J. Geophys. Res., 76, p. 1197—1211.

ASMUS, H. E., PONTE, F. C., (1973). In : The Ocean Basins and Margins, 1 The South Atlantic (ed. A. E. M. Nairn and F. G. Stehli), *The Brazilian marginal basins,* p. 87—132, Plenum, New York.

BACH, C. (1900). In : Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, p. 1169.

BACH, C. (1903). *Die Maschinen Elemente,* ed. 9 und ed. 12, p. 121, A. Bergsträsser, Stuttgart.

BOLLI, H. M., RYAN, W. B. F. and Scientific Party (1975). *Basins and margins of the eastern South Atlantic,* Geotimes, 20, p. 22—24.

BORN, M. (1915). *Dynamik der Kristallgitter,* Teubner, Leipzig.

BORN, M. (1969). *Fizica în concepţia generaţiei mele* (trad. din limba germană după ediţia întîia, 1966), Cap. 6, p. 96—97, Cap. 23, p. 350—363, Editura ştiinţifică, Bucureşti.

BORN, M., GREEN, H. S. (1947). *A general kinetic theory of liquids,* Proc. Roy. Soc. A188, 10.

BORN, M., KUN-HUANG (1954). *Dynamic Theory of Cristal Lattices,* Clarendon Press, Oxford.

BOTT, M. H. P. (1981). *Crustal doming and the mechanism of continental rifting,* Tectonophysics, 73, p. 1—8, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

BRAGG, W., BRAGG, L. (1934). *The crystalline state,* Bell, London.

BRIDWELL, R. J., POTZICK, C. (1981). *Thermal regimes, mantle diapirs and crustal stresses of continental rifts,* Tectonophysics, 73, p. 15—32, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

BURKE, K. (1976). *Development of Graben Associated with the Initial Ruptures of the Atlantic Ocean*, Tectonophysics, **36**, p. 93—112, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

BURKE, K., WHITEMAN, A. J., (1973). In : Implications of Continental Drift to the Earth Sciences (ed. D. H. Tarling and S. K. Runcorn), *Uplift rifting and the break-up of Africa*, p. 735—755, Academic Press, London.

CARLEMAN, T. (1957). *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*, Uppsala.

ČERMÁK, V. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow Map of Europe*, p. 3—40, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

CHAPMAN, S., COWLING, T. (1952). *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge.

CHAPMAN, D. S., POLLACK, H. N. (1975). *Global heat flow : a new look*, Earth Plan t. Sci. Lett. **28**, p. 23—32.

CHAPMAN, D. S., POLLACK, H. N., ČERMÁK, V. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Global Heat Flow with Special Reference to the Region of Europe*, p. 41—48, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

CHOH, S. T., UHLENBECK, G. E., (1958). *The Kinetic Theory of Phenomena in Dense Gases*, Navy Theoretical Physics, Contract no. Nonr. 1224 (15).

CLOOS, H. (1939). *Hebung, Spaltung, Vulkanismus*, Geol.. Rundsch., **30**, p. 405—527.

COWPER, A. D. (1926). *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, Methusen and Co., London.

CREȚU, I., SOARE, AL., DAVID, V., OSNEA, AL., (1966). *Probleme de hidraulică subterană*, Cap. II, p. 65—66, Editura tehnică, București.

DAVIS, E. E., LISTER, C. R. B. (1977). *Heat flow measured over the Juan de Fuca Ridge : Evidence for widespread hydrothermal circulation in a highly heat transportive crust*, J. Geophys. Res. **82**, p. 4845—4860.

DEWEY, J. F., BURKE, K. (1974). *Hot spots and co tinental break-up*, Geology, **2** p. 57—60.

DUNCAN, R. A., (1981). *Hotspots in the southern oceans — An absolute frame of reference for motion of the Gondwana continents*, Tectonophysics, **74**, p. 29—42, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

FALVEY, D. A., (1974). *The development of continental margins in plate tectonic theory*, Aust. Pet. Explor. Assoc. J., **14**, p. 95—106.

FLORY, P. J. (1960). *High molecular weight compounds*, Cornell University Press, New York.

FORSYTH, D. W. (1975). *The early structural evolution and anisotropy of the oceanic upper mantle*, Geophys. J. R. Astron. Soc., **43**, p. 103—162.

FORSYTH, D. W., PRESS, F. (1971). *Geophysical tests of petrological models of the spreading lithosphere*, J. Geophys. Res., **76**, p. 7963—7979.

HERRIN, E. (1972). In : The Nature of the Solid Earth (ed. E. C. Robertson), *A comparative study of upper-mantle models : Canadian Shield and Basin and Range provinces*, p. 216—231, McGraw-Hill, New York.

HORVÁTH, F., BODRI, L., OTTLIK, P. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Geothermics of Hungary and the Tectonophysics of the Pannonian Basin « Red Spot »*, p. 206—217, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

HSUI, A. T., TOKSÖZ, M. N. (1981). *Back-arc spreading : Trench migration, continental pull or induced convection?*, Tectonophysics, **74**, p. 89—98, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

HUME-ROTHERY, W. (1954). *The Structure of Metals and Alloys*, Institute of Metals, London.

JURDY, D.M. (1981). *True polar wander,* Tectonophysics, 74 p.1–16, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

KAPPELMEYER, O. (1968). *Beiträge zur Erschliessung von Thermalwässern und natürlichen Dampfvorkommen,* Geol. Jahrb. 85, p. 783–808.

KAPPELMEYER, O. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Implications of Heat Flow Studies for Geothermal Energy Prospects,* p. 126–135, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

KARIG, D. E., (1974), *Evolution of arc systems in the Western Pacific,* Annual Review of Earth and Planetary Sciences, vol. 2, p. 51–75.

KIKOÏNE, A., KIKOÏNE, I. (1979). *Physique moléculaire* (traduit du russe), Chap. V, p. 225–261, Chap. VII, p. 330–397, Chap. IX, p. 431–516, Éditions Mir, Moscou.

KINSMAN, D. J. (1975). In : Petroleum and Global Tectonics (ed. A. G. Fischer and S. Judson), *Rift valley basins and sedimentary history of trailing continental margins,* p. 83–128, University Press, Princeton.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1969 a). *Électrodynamique des milieux continus* (traduit du russe), Physique théorique, tome VIII, Chap. I, p. 19–28, Chap. XI, p. 407––445, Chap. XIV, p. 482–508, Chap. XV, p. 509–523, Éditions Mir, Moscou.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1969 b). *Mécanique* (traduit du russe ; troisième édition revue), Physique théorique, tome I. Chap. IV, p. 68–75, Éditions Mir, Moscou.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1970). *Théorie des champs* (traduit du russe ; troisième édition revue et complétée), Physique théorique, tome II, Cahp. XI, p. 368–380, Éditions Mir, Moscou.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1971). *Mécanique des fluides* (traduit du russe), Physique théorique, tome VI, Éditions Mir, Moscou.

LĂZĂRESCU, V. (1980). *Geologie fizică,* p. 169–185, Editura tehnică, București.

LISTER, C. R. B. (1977). In : Heat flow and geodynamics (ed. A. M. Jessop), *Estimators for heat flow and deep rock properties based on boundary layer theory,* Tectonophysics, 41, p. 157–171, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

LUBIMOVA, H. A. (1958). *Thermal history of the earth with consideration of the variable thermal conductivity of the mantle,* Geophys. J., 1, p. 115–138.

LUBIMOVA, E. A., LYUBOSHITS, V. M., NIKITINA, V.N. (1976). In : Geoelectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Adám), *Effect of contrasts in the physical properties on the heat flow and electromagnetic profiles,* p. 72–99, Akadémiai Kiadó, Budapest.

MAC DONALD, G. J. F. (1959). *Calculations on the thermal history of the earth,* J. Geophys. Res., 64, p. 1967–2000.

MAC DONALD, G. J. F. (1963). *Deep structure of continents,* Rev. Geophys., 1, p. 587–665.

MAC GREGOR, I. D., BASU, A. R. (1974). *Thermal structure of the lithosphere : a petrologic model,* Science, 185, p. 1007–1011.

MARTIN, P., SCHWINGER, J. (1959). *Theory of Many-Particle Systems,* Phys. Rev. 115, no. 6, p. 1342.

MC KENZIE, D., WEISS, N. (1975). *Speculations on the thermal and tectonic hystory of the earth,* Geophys. J. R. Astron. Soc., 42, p. 131–174.

MERCIER, J. C., CARTER, N. L. (1975). *Pyroxene geotherms,* J. Geophys. Res., 80, p. 3349–3362.

MURRELL, S. A. F. (1976). *Rheology of the Lithosphere-Experimental Indications,* Tectonophysics, 36, p. 5–24, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

NENIȚESCU, C. D., (1960). *Tratat elementar de chimie organică,* Editura tehnică, București.

PENESCU, T., METSCH, M., HAUER, R. (1965). *Fizica zăcămintelor de pretrol și gaze,* Partea întîi, p. 21–30, Editura tehnică, București.

POLLACK, H. N., CHAPMAN, D. S. (1977). *On the regional variation of heat flow geotherms and lithospheric thickness,* Tectonophysics, 38, p. 279–296.

POP, R. A., PÎSLĂRAȘU, I. (1969). In : Manualul inginerului hidrotehnician, vol. I (ed. D. Dumitrescu și R. A. Pop), Secțiunea I, p. 14, Editura tehnică, București.
RĂDULESCU, D. P. (1976). *Vulcanii astăzi și în trecutul geologic*, p. 29—97, Editura tehnică, București.
RICE, F. O., TELLER, E. (1949). *The structure of matter*, J. Wiley, London.
SĂNDULESCU, D. (1965). In : Manualul inginerului, vol. I (ed. Gh. Buzdugan), *Fizica*, Cap. VI, 2, p. 1107—1110, Editura tehnică, București.
SEITZ, F. (1940). *The modern theory of solids*, Academic Press, New York.
SIESSER, W. G., SCRUTTON, R. A., SIMPSON, E. S. W. (1974). In : The Geology of Continental Margins (ed. C. A. Burk și C. L. Drake), *Atlantic and Indian Ocean margins of southern Africa*, p. 641—658, Springer, New York.
SLEEP, N. H. (1971). *Thermal effects of the formation of Atlantic continental margins by continental break up*, Geophys. J. R. Astron. Soc., **24**, p. 325—350.
SLEEP, N. H., SNELL, N. S. (1976). *Thermal contraction and flexure of mid-continent and Atlantic marginal basins*, Geophys. J. R. Astron. Soc., **45**, p. 125—154.
SOCOLESCU, M., CIOCÂRDEL, R., AIRINEI, ST., POPESCU, M. (1975). *Fizica și structura scoarței terestre din România*, Editura tehnică, București, p. 68.
SPACU, P., SĂNDULESCU, D., (1966). In : Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. II, *Chimie generală*, Cap. 1, p. 672—716, Editura tehnică, București.
TOZER, D. C. (1965). *Thermal history of the earth*, Geophys., J, 9, p. 95—112.
UYEDA, S. (1978), *The New View of the Earth, Moving Continents and Moving Oceans*, W. H. Freeman and Company, San Francisco.
VENING MEINESZ, F. A., (1950). *Les graben africains, résultat de compression ou de tension dans la croûte terrestre?* Bull. Inst. R. Colonial Belge, **21**, p. 539—552.
VLĂDEA, I. (1965). In : Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. VII, 2, p. 1136—1140, Editura tehnică, București.
VOINEA, R. (1966). In : Manualul inginerului, vol. II (ed. Gh. Buzdugan), Mecanica, III, *Rezistența materialelor*, Cap. 1, p. 391, Editura tehnică, București.
WANG, CHI-YUEN (1965). *Some Geophysical Implications from Gravity and Heat Flow Data*, Journal of Geophysical Research, vol. **70**, no. 22, p. 5629—5634.
WYCKOFF, R. (1953). *The Structure of Crystals*, vol. I, II, III, Chem Catalog, New York.
WYLLIE, P. J. (1971). *The Dynamic Earth : Textbook in Geosciences*, Wiley, New York.
ZIMAN, J. (1964). *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge.
ZONENSHAIN, L. P., SAVOSTIN, L. A., (1981). *Movement of lithospheric plates relative to subduction zones : formation of marginal seas and active continental margins*, Tectonophysics, 74, p. 57—87, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
* * * (1920). In : Hütte-Manuel de l'Ingénieur (ed. Ch. Béranger : traduit du allemande ; dix-neuvième édition), tome premier, 3e section, Chap. I, p. 273—275, 4e section, Chap. I, p. 364, Librairie polytechnique, troisième tirage, Paris—Liége.

> **«Termodinamica constituie o teorie vastă care se ocupă mai degrabă de sisteme și procese decît de particule și de mișcările acestora, iar legile sale sînt și ele legi generale. Conservarea energiei, creșterea entropiei și inaccesibilitatea zero-ului absolut sînt principii care, interpretate în mod corespunzător, se aplică tuturor proceselor din natură».**
>
> **ERNEST HUTTEN**

2. Principiile fundamentale și relațiile termodinamice

2.1. Primul principiu

Într-o porțiune eterogenă de crustă terestră, fie un volum elementar dV care include volumele $dV_1, dV_2, \ldots, dV_m$ ocupate de m faze componente (Kern și Weisbrod, 1964; Broecker și Oversby, 1971; Sychev, 1973; Seclăman, 1981), atît volumice (solide, lichide, gaze) cît și superficiale (contacte între solide și lichide, între lichide și gaze, între gaze și solide, între solide diferite, între lichide diferite), astfel încît $dV = \sum_{i=1}^{m} dV_i$ (fig.2.1). La temperatura T în interiorul volumului dV considerat, fiecare fază i se caracterizează prin valori proprii ale masei specifice ρ_i (vezi tabelul 2.1) și efortului unitar sau presiunii p_i (Birch, 1955; Thompson, 1958; Fyfe et al., 1962; Illieș și Greiner, 1976;

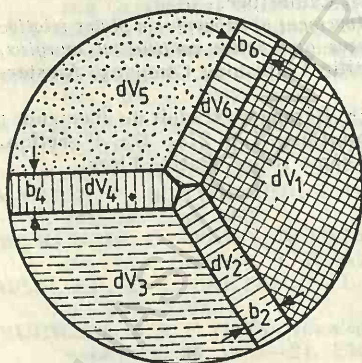


Fig. 2.1. Secțiune printr-un volum elementar $dV = \sum_{i=1}^{6} dV_i$ într-o porțiune eterogenă de crustă terestră

Tabelul 2.1.

Valorile masei specifice pentru unele substanțe componente ale crustei terestre (după Hütte-Manuel de l'Ingénieur, t. I, 1920; Manual pentru beton armat, 1949)

Denumirea substanței	Masa specifică (t/m³)
Elemente native	
Argint	10,42–10,53
Aur	19,33
Carbon	
diamant	3,50–3,60
grafit	1,90–2,30
Cupru	8,80
Platină	21,15
Sulf	2,07
Minerale	
Agat	2,50–2,80
Alabastru	2,30–2,80
Apatit	3,16–3,22
Aragonit	3,00
Azbest	2,10–3,00
canadian	2,40
albastru	3,00
Calcopirită	4,10–4,30
Caolin	2,20
Chihlimbar	1,00–1,10
Cinabru	8,12
Corindon	3,90–4,00
Cuarț	2,50–2,80
Feldspat	
ortoclaz (ortoză)	2,53–2,58
Galenă	7,30–7,60
Granat	3,40–4,30
Hematit	4,50–4,90
Hornblendă	3,00
Magnezit	3,00
Malahit	3,70–4,10
Mică	2,65–3,20
Opal	2,20
Pirită	4,90–5,20
Salpetru de Chile	2,26
Sare gemă	2,28–2,41
Serpentin	2,40–2,70
Smarald	2,68–2,73
Steatit	2,60–2,80
Talc	2,70
Topaz	3,51–3,57
Roci vulcanice	
Bazalt	2,70–3,20
Diabaz	2,80

(continuare tabel 2.1)

Denumirea substanței	Masa specifică (t/m³)
Diorit	2,90— 3,00
Gabbro	2,90— 3,00
Granit	2,51— 3,05
Melafir	2,60— 3,00
Piatră ponce	0,37— 0,90
Porfir	2,60— 2,90
Sienit	2,60— 2,80
Trahit	2,60— 2,80
Tuf	1,30— 2,00
Roci metamorfice	
Gneis	2,40— 2,70
Marmură	2,52— 2,85
de Carrara	2,72
Sist cristalin	2,10
Roci sedimentare	
Antracit	1,40— 1,70
Arcoză (Grauwacke)	2,60
Ardezie	2,65— 2,70
Argilă	1,80— 2,60
șistoasă	2,76— 2,88
Asfalt	1,10— 1,50
Calcar	2,46— 2,84
Cărbune brun	1,20— 1,50
Conglomerat calcaros	2,20
Cretă	1,80— 2,60
Dolomit	2,80— 2,90
Gresie	2,20— 2,60
calcaroasă	1,89— 1,92
Huilă	1,20— 1,50
Lignit	1,20— 1,50
Marnă	2,30— 2,50
Nisip	
fin umed	1,90— 2,05
fin uscat	1,40— 1,65
grosier	1,40— 1,50
Pietriș	
umed	2,00
uscat	1,80
Travertin	2,40
Turbă	0,21— 0,64
bituminoasă	0,84
***	
Apă	
distilată la 277,15°K	1,00
de mare la 288,15°K	1,02— 1,03
Gheață	0,88— 0,92
Zăpadă afînată	0,12— 0,13

Anderson și Bridwell, 1981; Artyushkov, 1981; Neugebauer și Temme, 1981) cărora le corespunde o valoare $\rho_i \varepsilon_i dV_i$ a energiei interne asociate particulelor componente ale fazei cu masa $\rho_i dV_i$. *Energia internă a oricărei unități de masă* a unei faze depinde numai de mărimile de stare internă, adică ε_i are o singură valoare pentru fiecare stare. Variația energiei interne a unității de masă se realizează prin schimbul de energie internă cu exteriorul acesteia și prin transformarea în alte energii a energiei interne și în energie internă a altor energii (nucleară, mecanică, chimică, electrică, magnetică etc.). Din analiza bilanțului de energie într-un proces infinitesimal (modificare infinitesimală de stare), potrivit *principiului conservării energiei*, rezultă că variația infinitesimală $d\varepsilon_i$ a energiei interne a unității de masă reprezintă suma participărilor cu coeficienții de transformare $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^n$ ale variațiilor infinitesimale componente de energie internă $de_1, de_2, \ldots, de_n$ datorite respectiv schimbului de energie internă cu exteriorul unității de masă, transformării energiei nucleare, transformării energiei mecanice, transformării energiei chimice, transformării energiei electrice, transformării energiei magnetice și transformării altor energii posibile, adică

$$d\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j de_j. \tag{2.1}$$

Fiecare variație infinitesimală componentă de_j participă la variația infinitesimală rezultantă $d\varepsilon_i$ prin intermediul unor forme tranzitorii de energie reprezentate printr-un *lucru elementar* $\delta\omega_j$ și printr-o *variație infinitesimală de căldură* δq_j, fiind satisfăcută egalitatea

$$de_j = \delta\omega_j + \delta q_j \tag{2.2}$$

corespunzătoare *primului principiu al termodinamicii* (Clapeyron, 1834; Epstein, 1937; Leontovici, 1954; Karapetianț, 1957; Bazarov, 1962; Fermi, 1969) exprimat, conform cu (2.1), prin ecuația

$$d\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \delta\omega_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \delta q_j, \tag{2.3}$$

unde e_j și ε_i sînt mărimi de stare, adică au cîte o singură valoare pentru fiecare stare și deci de_j și $d\varepsilon_i$ reprezintă diferențiale totale exacte, iar ω_j și q_j nu sînt mărimi de stare, adică au valori dependente de transformările intermediare și deci $\delta\omega_j$ și δq_j nu sînt diferențiale totale exacte. Pentru unitatea de masă a oricărei faze $i = 1, 2, \ldots, m$, se convine să se desemneze prin $\lambda_i^1 \delta\omega_1$ *lucrul elementar mecanovolumic*

$$-p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right) = \frac{p_i}{\rho_i^2} d\rho_i$$

sau *mecanosuperficial*

$$-\upsilon_i \mathrm{d}\,\Omega_i = -\frac{\upsilon_i}{b_i}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho_i}\right) = -p_i \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho_i}\right) = \frac{p_i}{\rho_i^2}\,\mathrm{d}\rho_i$$

şi prin $\lambda_i^1\delta q_1$ *variaţia infinitesimală de căldură complementară acestuia*, unde p_i este efortul unitar sau presiunea corespunzătoare fazei, iar υ_i, $\mathrm{d}\Omega_i$ şi b_i sînt tensiunea] superficială (Brace şi Walsh, 1962 ; Gutshall et al.. 1970), aria elementară şi grosimea fazei superficiale, prin $\lambda_i^2\,\delta\,\omega_2$, $\lambda_i^3\,\delta\omega_3, \ldots, \lambda_i^n\delta\,\omega_n$ celelalte lucruri elementare posibile şi prin $\lambda_i^2\,\delta q_2$, $\lambda_i^3\,\delta\,q_3, \ldots, \lambda_i^n\delta\,q_n$ variaţiile infinitesimale de căldură complementare acestora. Aşadar, lucrul elementar mecanovolumic sau mecanosuperficial are expresia

$$\lambda_i^1\delta\omega_1 = \frac{p_i}{\rho_i^2}\,\mathrm{d}\rho_i \tag{2.4}$$

şi variaţia infinitesimală

$$\frac{1}{\left(\dfrac{p_i}{\rho_i^2}\right)}\,\lambda_i^1\delta\omega_1 = \delta\,\rho_i$$

este o diferenţială totală exactă (diferenţiala masei specifice) în care $1/(p_i/\rho_i^2) = 1/X_i^1$ reprezintă un factor integrant al lui $\lambda_i^1\delta\omega_1$. Înmulţind şi celelalte lucruri elementare $\lambda_i^j\delta\omega_j$ cu cîte un factor integrant corespunzător $1/X_i^j$ astfel încît orice variaţie infinitesimală

$$\frac{1}{X_i^j}\,\lambda_i^j\delta\omega_j = \mathrm{d}x_j$$

să reprezinte o diferenţială totală exactă (diferenţiala concentraţiei specifice a radiaţiilor nucleare, diferenţiala volumului specific corespunzător eforturilor unitare, diferenţiala concentraţiei specifice a componenţilor chimici, diferenţiala inducţiei specifice a cîmpului electric, diferenţiala inducţiei specifice a cîmpului magnetic etc.), se găseşte pentru fiecare dintre aceste lucruri elementare o expresie de forma

$$\lambda_i^j\delta\omega_j = X_i^j\mathrm{d}\,x_j \tag{2.5}$$

în care X_i^j este o mărime intensivă (intensitatea radiaţiilor nucleare, intensitatea eforturilor unitare, intensitatea potenţialelor chimice,

intensitatea cîmpului electric, intensitatea cîmpului magnetic etc.), unde $j = 2,3,\ldots, n$. Spre deosebire de lucrurile elementare $\lambda_i^1\delta\omega_1$, $\lambda_i^2\,\delta\,\omega_2,\ldots,\ \lambda_i^n\delta\omega_n$, complementarele lor $\lambda_i^1\delta q_1$, $\lambda_i^2\ \delta\ q_2,\ldots,\lambda_i^n\delta q_n$ nu se prezintă deocamdată individualizate în cadrul variației infinitesimale de căldură

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j\delta q_j = \delta(c_i T) \tag{2.6}$$

corespunzătoare unității de masă a fazei i cu *căldura specifică* (*căldura masică*) c_i. Ținînd seamă de (2.4), (2.5) și (2.6), pentru unitatea de masă a fiecărei faze i, ecuația (2.3) se poate scrie :

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \frac{p_i}{\rho_i^2}\,\mathrm{d}\rho_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j + \delta(c_i T) \tag{2.7}$$

sau

$$\mathrm{d}\left(\varepsilon_i + \frac{p_i}{\rho_i}\right) = \frac{1}{\rho_i}\,\mathrm{d}p_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j\,\mathrm{d}x_j + \delta(c_i\ T).$$

Prin intermediul mărimii de stare

$$\varepsilon_i + \frac{p_i}{\rho_i} = \eta_i \tag{2.8}$$

numită *entalpie a unității de masă* a fazei i, ultima ecuație se mai prezintă sub forma

$$\mathrm{d}\eta_i = \frac{1}{\rho_i}\,\mathrm{d}p_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j\,\mathrm{d}x_j + \delta(c_i\ T). \tag{2.9}$$

Potrivit ecuațiilor (2.7) și (2.9), variațiile infinitesimale ale energiei interne și entalpiei ansamblului celor m faze cu masa $\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i$ se definesc prin expresiile

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varepsilon_i \mathrm{d}V_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i}\,\mathrm{d}\rho_i\,\mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i\ T)\,\mathrm{d}V_i$$

și respectiv

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\eta_i \mathrm{d}V_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}p_i\,\mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i\ T)\,\mathrm{d}V_i\,,$$

iar variaţiile infinitesimale ale energiei interne şi entalpiei unei unităţi oarecare a acestei mase se determină astfel:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varepsilon_i \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i} \mathrm{d}\rho_i \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \sum\limits_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i\, T) \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i}, \tag{2.10}$$

iş respectiv

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\eta_i \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{d}p_i \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \sum\limits_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i\, T) \mathrm{d}V_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i}. \tag{2.11}$$

Dacă se introduc notaţiile

$$\frac{1}{\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i = \tilde{\rho}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\tilde{\rho}}{\mathrm{d}\tilde{\rho} \mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i} \mathrm{d}\rho_i \mathrm{d}V_i = \tilde{p}, \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho} \mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varepsilon_i \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}, \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho} \mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\eta_i \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}\tilde{\eta}, \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho} \mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i = \sum_{=2}^{n} \tilde{X}^j \mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.16}$$

și

$$\frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V}\sum_{i=1}^{m}\rho_i\delta(c_i\, T)\mathrm{d}V_i=\delta(\tilde{c}\ T) \tag{2.17}$$

pentru masa specifică medie, efortul unitar mediu sau presiunea medie, diferențiala energiei interne medii, diferențiala entalpiei medii, lucrul elementar mediu și respectiv variația infinitesimală a căldurii medii pe o unitate oarecare de masă a crustei terestre, atunci expresiile (2.10) și (2.11) ale primului principiu al termodinamicii se scriu sub formele

$$\mathrm{d}\tilde{\varepsilon}=\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\,\mathrm{d}\tilde{\rho}+\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j+\delta(\tilde{c}\,T) \tag{2.18}$$

și respectiv

$$\mathrm{d}\tilde{\eta}=\frac{1}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}\tilde{p}+\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j+\delta(\tilde{c}\ T), \tag{2.19}$$

unde

$$\mathrm{d}\tilde{p}=\frac{1}{\mathrm{d}V}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{d}p_i\,\mathrm{d}V_i=\frac{1}{\mathrm{d}V}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{p_i}{\rho_i}\,\mathrm{d}\rho_i+\rho_i\mathrm{d}\left(\frac{p_i}{\rho_i}\right)\right]\mathrm{d}V_i=$$

$$=\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}\tilde{\rho}+\tilde{\rho}\mathrm{d}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right). \tag{2.20}$$

2.2. Al doilea principiu

Căldura unității de masă a oricărei faze $i=1,2,\ldots,m$ depinde de temperatura T, de masa specifică ρ_i și de efortul unitar sau presiunea p_i, reprezentînd o funcție fie de T și de ρ_i, fie de T și de p_i, astfel încît variația sa infinitesimală definită prin (2.6) se poate exprima:

$$\delta(c_i\ T)=\left[\frac{\partial(c_i\ T)}{\partial T}\right]_{\rho_i}\mathrm{d}T+\left[\frac{\partial(c_i\ T)}{\partial\rho_i}\right]_T\mathrm{d}\rho_i$$

sau

$$\delta(c_i\ T)=\left[\frac{\partial(c_i\ T)}{\partial T}\right]_{p_i}\mathrm{d}T+\left[\frac{\partial(c_i\ T)}{\partial p_i}\right]_T\mathrm{d}p_i\,.$$

Derivatele parțiale

$$\left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial T}\right]_{\rho_i} = c_{\rho_i} \tag{2.21}$$

și

$$\left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial T}\right]_{p_i} = c_{p_i} \tag{2.22}$$

sînt *căldurile specifice* ale fazei *i la masă specifică constantă* și respectiv *la efort unitar constant* sau *presiune constantă*. Cu notațiile (2.21) și (2.22), variația infinitesimală de căldură a unității de masă a fazei i se mai scrie sub formele

$$\delta(c_i T) = c_{\rho_i} \mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \mathrm{d}\rho_i = c_{p_i} \mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial c_i}{\partial p_i}\right)_T \mathrm{d}p_i \tag{2.23}$$

din care se deduce că

$$c_{p_i} - c_{\rho_i} = T\left[\left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}T} - \left(\frac{\partial c_i}{\partial p_i}\right)_T \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}T}\right] =$$

$$= T\left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \left[\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}T} - \left(\frac{\partial \rho_i}{\mathrm{d}p_i}\right)_T \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}T}\right]$$

sau

$$c_{p_i} - c_{\rho_i} = T\left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial T}\right)_{p_i}, \tag{2.24}$$

unde $(\partial c_i/\partial \rho_i)_T < 0$, $(\partial \rho_i/\partial T)_{p_i} < 0$ și deci $c_{p_i} - c_{\rho_i} > 0$. În cazul fazelor solide și lichide, diferența dintre căldurile specifice c_{p_i} și c_{ρ_i} este foarte mică și prin urmare $c_{p_i} \approx c_{\rho_i}$. Valorile căldurilor specifice pentru unele substanțe componente ale crustei terestre și pentru apă sînt prezentate în tabelele 2.2 și 2.3.

Întrucît variația infinitesimală $\delta\,(c_i\,T)$ reluată, conform cu (2.23), prin expresiile

$$\delta(c_i T) = T\left[\frac{c_{\rho_i}}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \mathrm{d}\rho_i\right] = T\left[\frac{c_{p_i}}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial c_i}{\partial p_i}\right)_T \mathrm{d}p_i\right]$$

nu constituie o diferențială totală exactă, se recurge la o funcție $\sigma_i = \sigma_i\,(T, \rho_i)$ sau $\sigma_i = \sigma_i\,(T, p_i)$ numită *entropie specifică* care satisface condițiile

$$\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}\right)_{\rho_i} = \frac{c_{\rho_i}}{T} \tag{2.25}$$

Tabelul 2.2

Valorile căldurii specifice pentru unele substanțe componente ale crustei terestre

Denumirea substanței	Căldura specifică (kJ/kg. °K)	Sursa de informație
Elemente native		
Argint	0,23	
Aur	0,13	
Carbon	0,80	
grafit	0,84	Vlădea (1965)
Cupru	0,39	
Iridiu	0,13	
Platină	0,13	
Sulf	0,72	
Minerale		
Corindon	0,80	
Cuarț	0,78	
cristobalit	0,75	
Gips	1,09	Vlădea (1965)
Hematit	0,67	
Magnetit	0,64	
Mică	0,84	
Salpetru de Chile	1,15	
Sare gemă	0,87	
Silvină	0,69	
Roci vulcanice		
Bazalt	0,80	Vlădea (1965)
	0,80—0,88	
Diorit	0,63	Juhász (1976)
Gabbro	0,71	
Granit	0,75	Vlădea (1965)
	0,80	Juhász (1976)
fisurat	1,20	Bernard și Evano (1975)
Piatră ponce	1,00	Vlădea (1965)
Sienit	0,84	
Tuf	0,84—1,26	Juhász (1976)
Roci metamorfice		
Cuarțit	0,71	Juhász (1976)
Gneis	0,75	
Marmură	0,80	Vlădea (1965)
	0,84—1,00	
Sist cristalin	0,84	Juhász (1976)
Roci sedimentare		
Ardezie	0,75	Vlădea (1965)
Argilă	0,75—0,80	Juhász (1976)
Asfalt	0,92	Vlădea (1965)

Denumirea substanței	Căldura specifică (kJ/kg.°K)	Sursa de informație
Calcar	0,67–0,88	Juhász (1976)
compact	0,92	
poros	0,67	
Diatomit	0,84	Vlădea (1965)
Dolomit	0,88	
	0,92	Juhász (1976)
Gresie	0,71	Vlădea (1965)
	0,84–0,88	Juhász (1976)
calcaroasă	0,84	Vlădea (1965)
Huilă	1,26	
Lut	0,88	
Marnă	0,88	Juhász (1976)
Mil umed	2,01	
Nisip	1,01	Faust și Mercer (1975)
	1,00	Garg et al. (1975)
	0,84	Juhász (1976)
umed	2,09	
uscat	0,80	
Lichide		
Apă	4,18	Vlădea (1965)
	4,19	Juhász (1976)
Benzen	0,48	Vlădea (1965)
Octan normal	2,18	
Pentan normal	2,18	
Toluen	1,67	
Xilen	1,72	
Gaze la 273,15° K		
Aer		Vlădea (1965)
la presiune const.	1,00	
la masă spec. const.	0,71	
Amoniac		Vlădea (1965)
la presiune const.	2,06	
la masă spec. const.	1,56	
Argon		
la presiune const.	0,52	
la masă spec. const.	0,31	
Azot		
la presiune const.	1,04	
la masă spec. const.	0,74	
Bioxid de carbon		
la presiune const.	0,82	
la masă spec. const.	0,63	
Bioxid de sulf		
la presiune const.	0,63	
la masă spec. const.	0,45	

(continuare tabel 2.2)

Denumirea substanței	Căldura specifică (kJ/kg.°K)	Sursa de informație
Etan		
la presiune const.	1,67	
la masă spec. const.	1,37	
Heliu		
la presiune const.	5,23	
la masă spec. const.	3,15	
Hidrogen		
la presiune const.	14,24	
la masă spec. const.	10,10	Vlădea (1965)
Hidrogen sulfurat		
la presiune const.	1,11	
la masă spec. const.	0,85	
Metan		
la presiune const.	2,18	
la masă spec. const.	1,67	
Oxigen		
la presiune const.	0,91	
la masă spec. const.	0,65	

Tabelul 2.3.

Valorile căldurii specifice [kJ/kg.°K] a apei în funcție de temperatură și de presiune (după Vladea, 1965)

Temperatura (°K)	Presiunea (N/m²)				
	1,01325.10⁵	5,06625.10⁶	1,01325.10⁷	2,02650.10⁷	3,03975.10⁷
273,15	4,219	4,204	4,195	4,178	4,162
293,15	4,183	4,170	4,162	4,141	4,120
313,15	4,180	4,162	4,153	4,128	4,107
333,15	4,186	4,166	4,162	4,141	4,124
353,15	4,198	4,183	4,174	4,153	4,137
373,15	4,217	4,204	4,191	4,170	4,153
393,15	—	4,233	4,220	4,199	4,178
413,15	—	4,266	4,262	4,237	4,212
433,15	—	4,325	4,308	4,279	4,254
453,15	—	4,396	4,371	4,333	4,300
473,15	—	4,484	4,451	4,413	4,358
493,15	—	4,593	4,555	4,488	4,434
513,15	—	4,739	4,693	4,605	4,530
533,15	—	4,945	4,886	4,760	4,656
553,15	—	—	5,196	4,986	4,836
573,15	—	—	5,694	5,330	5,087
583,15	—	—	—	5,518	5,263
593,15	—	—	—	5,949	5,447
603,15	—	—	—	6,284	5,661
613,15	—	—	—	6,992	6,012
623,15	—	—	—	8,219	6,431

și

$$\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_i}\right)_T = \left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \tag{2.26}$$

sau respectiv

$$\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}\right)_{p_i} = \frac{c_{p_i}}{T} \tag{2.27}$$

și

$$\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i}\right)_T = \left(\frac{\partial c_i}{\partial p_i}\right)_T, \tag{2.28}$$

astfel încît variațiile elementare

$$\frac{c_{\rho_i}}{T}\,\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial c_i}{\partial \rho_i}\right)_T \mathrm{d}\rho_i = \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}\right)_{\rho_i} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_i}\right)_T \mathrm{d}\rho_i = \mathrm{d}\sigma_i(T, \rho_i) \tag{2.29}$$

sau

$$\frac{c_{p_i}}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial c_i}{\partial p_i}\right)_T \mathrm{d}p_i = \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}\right)_{p_i} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i}\right)_T \mathrm{d}p_i = \mathrm{d}\sigma_i(T, p_i) \tag{2.30}$$

reprezintă diferențiala totală exactă

$$\frac{1}{T}\,\delta(c_i\,T) = \mathrm{d}\sigma_i, \tag{2.31}$$

unde $1/T$ este factorul integrant al lui $\delta(c_i T)$.

Potrivit ecuației (2.6), variația infinitesimală de căldură a unității de masă a oricărei faze i se compune din variația infinitesimală de căldură complementară lucrului elementar mecanovolumic sau mecanosuperficial corespunzător unității de masă și din suma variațiilor infinitesimale de căldură complementară sumei celorlalte lucruri elementare posibile corespunzătoare aceleiași unități de masă, adică

$$\delta(c_i T) = \lambda_i^1 \delta q_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_i^j \delta q_j,$$

deci bilanțul variațiilor de căldură raportate la un interval infinitesimal de timp $\mathrm{d}t$ se exprimă, pentru unitatea de volum a oricărei faze i, prin ecuația

$$\rho_i \frac{\delta(c_i T)}{\mathrm{d}t} = \rho_i \lambda_i^1 \frac{\delta q_1}{\mathrm{d}t} + \rho_i \sum_{j=2}^{n} \lambda_i^j \frac{\delta q_j}{\mathrm{d}t}, \tag{2.32}$$

unde termenul $\rho_i \lambda_i^1 \delta q_1/\mathrm{d}t$ este fluxul de căldură prin care se modifică puterea disponibilă pentru realizarea lucrului elementar mecanovolumic sau mecanosuperficial în unitatea de timp și pe unitatea de volum, iar termenul

$$\rho_i \sum_{j=2}^{n} \lambda_i^j \frac{\delta q_j}{\mathrm{d}t} = \mu_j \tag{2.33}$$

reprezintă fluxul de căldură din sau în surse interioare (pozitive sau negative) prin care variază, la temperatura T, puterea disponibilă pentru realizarea tuturor celorlalte lucruri elementare în aceeași unitate de timp și pe aceeași unitate de volum. Prin urmare, bilanțul fluxurilor (debitelor) de căldură pentru unitatea de volum a oricărei faze i corespunde ecuației

$$\rho_i \frac{\delta(c_i T)}{\mathrm{d}t} = \rho_i \lambda_i^1 \frac{\delta q_1}{\mathrm{d}t} + \mu_i \tag{2.34}$$

care mai poate fi scrisă, ținînd seamă de (2.31), sub forma

$$\rho_i T \frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}t} = \rho_i \lambda_i^1 \frac{\delta q_1}{\mathrm{d}t} + \mu_i,$$

de unde rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda_i^1}{T} \frac{\delta q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu_i}{\rho_i T}. \tag{2.35}$$

Dacă fiecare fază i ar fi izolată ca un sistem termodinamic închis față de exteriorul său, atunci orice proces infinitesimal s-ar desfășura, potrivit *principiului al doilea al termodinamicii* (Carnot, 1824; Boltzmann, 1896–1898; Vulkalovici, 1956; Schmidt, 1958; Soo, 1962; Davidescu, 1964), în sensul diminuării (proces ireversibil (Fitts, 1962; Lykov, 1966)) sau cel mult menținerii (proces reversibil) disponibilității de realizare a lucrului mecanovolumic sau mecanosuperficial pe seama sporirii sau cel puțin menținerii disponibilității de realizare a căldurii complementare acestuia, adică în sensul inegalității

$$\rho_i \lambda_i^1 \frac{\delta q_1}{\mathrm{d}t} \geqslant 0 \tag{2.36}$$

și deci, în concordanță cu (2.34), al inegalității echivalente

$$\rho_i \frac{\delta(c_i T)}{\mathrm{d}t} - \mu_i \geqslant 0 \tag{2.37}$$

din care se obține, conform cu (2.31), *inegalitatea lui Clausius-Duhem* (Christensen, 1971 ; Rabotnov, 1980)

$$\rho_i T \frac{d\sigma_i}{dt} - \mu_i \geqslant 0. \qquad (2.38)$$

În absența surselor interioare de căldură, inegalitatea (2.38) se reduc la *inegalitatea lui Clausius*

$$\frac{d\sigma_i}{dt} \geqslant 0 \qquad (2.39)$$

sau

$$d\sigma_i \geqslant 0 \qquad (2.39')$$

conform căreia orice proces infinitesimal într-o fază i izolată ca un sistem termodinamic închis se desfășoară în sensul creșterii sau cel puțin menținerii entropiei specifice a fazei (Robie și Waldbaum, 1968).

Prin intermediul egalității (2.31) de definiție a diferențialei entropiei specifice a unei faze, ecuațiile (2.7) și (2.9) corespunzătoare primului principiu al termodinamicii pentru unitatea de masă a aceleiași faze pot fi prezentate respectiv sub formele

$$d\varepsilon_i = T\, d\sigma_i + \frac{p_i}{\rho_i^2} d\rho_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j \qquad (2.40)$$

sau

$$d(\varepsilon_i - T\sigma_i) = -\sigma_i dT + \frac{p_i}{\rho_i^2} d\rho_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j \qquad (2.40')$$

și

$$d\eta_i = T\, d\sigma_i + \frac{1}{\rho_i} dp_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j \qquad (2.41)$$

sau

$$d(\eta_i - T\sigma_i) = -\sigma_i dT + \frac{1}{\rho_i} dp_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j. \qquad (2.41')$$

În formele (2.40′) și (2.41′) ale acestor ecuații este evidențiată energia legată (indisponibilă) $T\sigma_i$ care se scade din energia internă ε_i și din entalpia η_i ale aceleiași unități de masă a fazei (Gibbs, 1877 ; Robie și Waldbaum, 1968 ; Nriagu, 1975) pentru a se obține *energia liberă*

$$\varepsilon_i - T\sigma_i = \varphi_i \tag{2.42}$$

și *entalpia liberă* (*exergia*)

$$\eta_i - T\sigma_i = \gamma_i \tag{2.43}$$

cunoscute respectiv și sub denumirile de *potențialul lui Helmholtz* și *potențialul lui Gibbs* (Vlădea, 1965 ; Antropov, 1979 ; Bosworth, 1981). Prin definițiile (2.42) și (2.43), energia liberă și entalpia liberă sînt mărimi de stare ale căror diferențiale satisfac respectiv ecuațiile (2.40′) și (2.41′) preluate sub formele

$$\mathrm{d}\varphi_i = -\sigma_i\,\mathrm{d}T + \frac{p_i}{\rho_i^2}\,\mathrm{d}\rho_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \tag{2.44}$$

și

$$\mathrm{d}\gamma_i = -\sigma_i \mathrm{d}T + \frac{1}{\rho_i}\,\mathrm{d}p_i + \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j. \tag{2.45}$$

Pentru ansamblul celor m faze cu masa $\sum_{i=1}^{m} \rho_i\,\mathrm{d}V_i = \tilde{\rho}\,\mathrm{d}V$ și pentru o unitate oarecare a acestei mase, variațiile infinitesimale de căldură se pot prezenta cu expresiile

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i T)\,\mathrm{d}V_i = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial T}\right]_{\rho_i} \mathrm{d}T\mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial \rho_i}\right]_T \mathrm{d}\rho_i \mathrm{d}V_i$$

sau

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i T)\,\mathrm{d}V_i = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial T}\right]_{p_i} \mathrm{d}T\,\mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial p_i}\right]_T \mathrm{d}p_i \mathrm{d}V_i$$

și respectiv

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i T)\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial T}\right]_{\rho_i} \mathrm{d}T\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \left[\frac{\partial(c_i T)}{\partial \rho_i}\right]_T \mathrm{d}\rho_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} \tag{2.46}$$

sau

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\delta(c_iT)\,\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left[\frac{\partial(c_iT)}{\partial T}\right]_{p_i}\mathrm{d}T\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}+\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left[\frac{\partial(c_iT)}{\partial p_i}\right]_T\mathrm{d}p_i\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}. \tag{2.47}$$

Dacă se utilizează notațiile (2.12) și (2.17) conform cărora

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\delta(c_iT)\,\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}=\frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V}\sum_{i=1}^{m}\rho_i\delta(c_iT)\,\mathrm{d}V_i=\delta(\tilde{c}\,T)$$

și se mai introduc notațiile

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left[\frac{\partial(c_iT)}{\partial T}\right]_{\rho_i}\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}=\left[\frac{\partial(\tilde{c}\,T)}{\partial T}\right]_{\tilde{\rho}}, \tag{2.48}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left[\frac{\partial(c_iT)}{\partial \rho_i}\right]_T\mathrm{d}\rho_i\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}=\left[\frac{\partial(\tilde{c}\,T)}{\partial\tilde{\rho}}\right]_T\mathrm{d}\tilde{\rho}, \tag{2.49}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left[\frac{\partial(c_iT)}{\partial T}\right]_{p_i}\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}=\left[\frac{\partial(\tilde{c}\,T)}{\partial T}\right]_{\tilde{p}} \tag{2.50}$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left[\frac{\partial(c_iT)}{\partial p_i}\right]_T\mathrm{d}p_i\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m}\rho_i\mathrm{d}V_i}=\left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial\tilde{p}}\right]_T\mathrm{d}\tilde{p}, \tag{2.51}$$

atunci expresiile (2.46) și (2.47) ale variației infinitesimale a căldurii medii pe o unitate oarecare de masă a crustei terestre se pot scrie:

$$\delta(\tilde{c}T) = \left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial T}\right]_{\tilde{\rho}} \mathrm{d}T + \left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial \tilde{\rho}}\right]_T \mathrm{d}\tilde{\rho} =$$

$$\left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial T}\right]_{\tilde{p}} \mathrm{d}T + \left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial \tilde{p}}\right]_T \mathrm{d}\tilde{p}. \tag{2.52}$$

Evidențiind căldura specifică medie la masă specifică medie constantă

$$\left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial T}\right]_{\tilde{\rho}} = \tilde{c}_{\tilde{\rho}} \tag{2.53}$$

și căldura specifică medie la efort unitar mediu constant sau presiune medie constantă

$$\left[\frac{\partial(\tilde{c}T)}{\partial T}\right]_{\tilde{p}} = \tilde{c}_{\tilde{p}} \tag{2.54}$$

între care există, conform cu (2.24), relația

$$\tilde{c}_{\tilde{p}} - \tilde{c}_{\tilde{\rho}} = T\left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}, \tag{2.55}$$

variația infinitesimală $\delta(\tilde{c}T)$ se mai exprimă sub formele

$$\delta(\tilde{c}T) = T\left[\frac{\tilde{c}_{\tilde{\rho}}}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{\rho}\right] = T\left[\frac{\tilde{c}_{\tilde{p}}}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{p}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{p}\right]. \tag{2.56}$$

Prin aceste ultime forme ale expresiilor variației infinitesimale a căldurii medii pe unitatea de masă a crustei terestre, se relevă entropia specifică medie $\tilde{\sigma}$ cu diferențiala totală exactă

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma} = \frac{\delta(\tilde{c}T)}{T} = \frac{\tilde{c}_{\tilde{\rho}}}{T}\delta T + \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{\rho} = \frac{\tilde{c}_{\tilde{p}}}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{p}}\right)_T \mathrm{d}\tilde{p} \tag{2.57}$$

în care

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{c}_{\tilde{\rho}}}{T}, \tag{2.58}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T = \left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T, \tag{2.59}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} = \frac{\tilde{c}_{\tilde{p}}}{T} \tag{2.60}$$

și

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_T = \left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{p}}\right)_T. \tag{2.61}$$

Potrivit egalității (2.31) și inegalității (2.37), pentru ansamblul celor m faze cu masa $\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i = \tilde{\rho}\,\mathrm{d}V$ și pentru o unitate oarecare a acestei mase izolate ca un sistem termodinamic închis, variațiile infinitesimale de căldură sînt respectiv de formele

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i T)\,\mathrm{d}V_i = T\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\sigma_i \mathrm{d}V_i \geqslant \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathrm{d}V_i$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta(c_i T)\,\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = T\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\sigma_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} \geqslant \mathrm{d}t\,\frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i}. \tag{2.62}$$

Dacă pentru variația infinitesimală a căldurii medii pe o unitate oarecare de masă a crustei terestre se folosește notația (2.17), iar pentru diferențiala entropiei specifice medii și fluxului mediu de căldură din sau în surse interioare corespunzătoare aceleiași unități de masă a crustei terestre se introduc respectiv notațiile

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\sigma_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\,\mathrm{d}V}\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\sigma_i \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}\,\tilde{\sigma} \tag{2.63}$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathrm{d}V_i = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}}, \tag{2.64}$$

atunci din (2.62) rezultă că

$$\tilde{\rho}\frac{\delta(\tilde{c}T)}{\mathrm{d}t} - \tilde{\mu} \geqslant 0 \tag{2.65}$$

și

$$\tilde{\rho}T\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}t} - \tilde{\mu} \geqslant 0. \tag{2.66}$$

În sfîrșit, potrivit ecuațiilor (2.40), (2.41), (2.44) și (2.45), diferențialele energiei interne, entalpiei, energiei libere și entalpiei libere ale ansamblului celor m faze cu masa $\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i = \tilde{\rho}\mathrm{d}V$ se definesc respectiv prin expresiile

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varepsilon_i \mathrm{d}V_i = T\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\sigma_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i}\mathrm{d}\rho_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \,\mathrm{d}V_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\eta_i \mathrm{d}V_i = T\sum_{i=1}^{m} \rho_i \,\mathrm{d}\sigma_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}p_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varphi_i \mathrm{d}V_i = -\mathrm{d}T\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sigma_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i}\mathrm{d}\rho_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i$$

și

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\gamma_i \mathrm{d}V_i = -\mathrm{d}T\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sigma_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}p_i \mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}V_i,$$

iar diferențialele acelorași mărimi de stare ale unei unități oarecare a acestei mase se determină astfel :

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i d\varepsilon_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} = T \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i d\sigma_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i} d\rho_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} +$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i}, \qquad (2.67)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i d\eta_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} = T \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i d\sigma_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} dp_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i}, \qquad (2.68)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i d\varphi_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} = -dT \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sigma_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\rho_i} d\rho_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} \qquad (2.69)$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i d\gamma_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} = - dT \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sigma_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} dp_i dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sum_{j=2}^{n} X_i^j dx_j dV_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i dV_i}. \qquad (2.70)$$

Utilizînd notațiile (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.20), (2.63) și introducînd încă notațiile

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varphi_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\varphi_i \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}\tilde{\varphi}, \tag{2.71}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}_i\gamma_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}\gamma_i \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}\tilde{\gamma} \tag{2.72}$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \sigma_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i \sigma_i \mathrm{d}V_i = \tilde{\sigma} \tag{2.73}$$

pentru diferențialele energiei libere specifice medii și entalpiei libere specifice medii și pentru entropia specifică medie pe o unitate oarecare de masă a crustei terestre, ecuațiile (2.67), (2.68), (2.69) și (2.70) se prezintă respectiv sub formele

$$\mathrm{d}\tilde{\varepsilon} = T\mathrm{d}\tilde{\sigma} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n} \tilde{X}^j \mathrm{d}\tilde{x}_j, \tag{2.74}$$

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = T\,\mathrm{d}\tilde{\sigma} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n} \tilde{X}^j \mathrm{d}\tilde{x}_j, \tag{2.75}$$

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi} = -\tilde{\sigma}\,\mathrm{d}T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n} \tilde{X}^j \mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.76}$$

și

$$\mathrm{d}\tilde{\gamma} = -\tilde{\sigma}\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n} \tilde{X}^j \mathrm{d}\tilde{x}_j. \tag{2.77}$$

2.3. Al treilea principiu

Pentru orice unitate de masă a unei faze $i = 1, 2, \ldots, m$ cu căldura specifică (căldura masică) c_i la temperatura T, variația infinitesimală a entropiei specifice este o diferențială totală exactă în a cărei expresie (2.31) preluată sub forma

$$d\sigma_i = c_i \frac{\delta(c_i T)}{(c_i T)}$$

intervine mărimea esențialmente statistică $c_i T$ corespunzătoare distribuției de energie pe mulțimea tuturor particulelor componente ale unității de masă a fazei (fig. 2.2). Această distribuție (Brush,

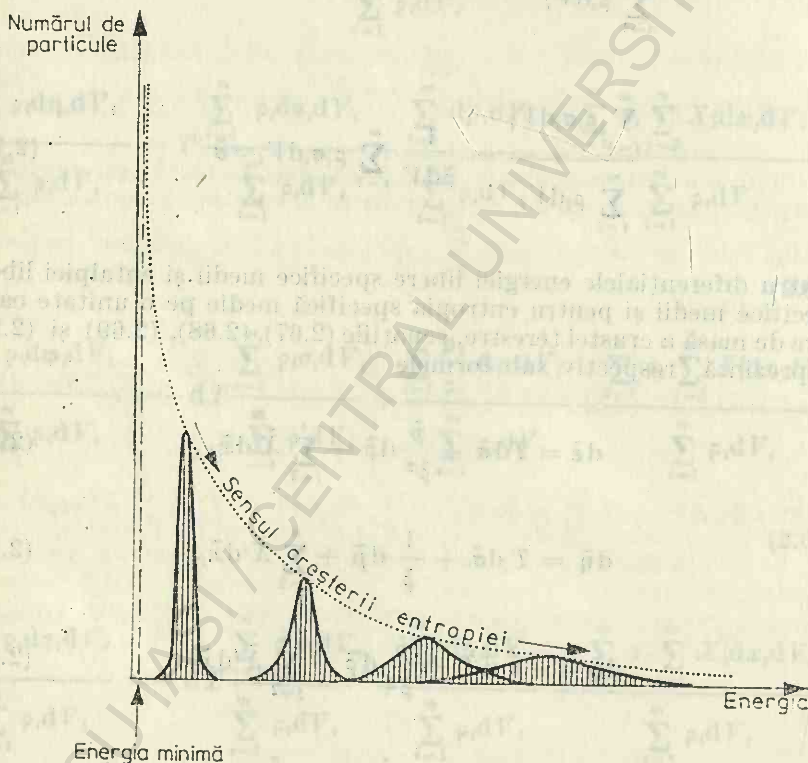


Fig. 2. 2. Reprezentarea grafică a unor distribuții posibile de energie pe particulele componente ale unității de masă

1970; Flamm et al., 1973) poate rezulta din diferite aranjamente (stări microscopice) egal posibile al căror număr reprezintă o probabilitate π_i de realizare a stării macroscopice corespunzătoare entropiei specifice σ_i. Definind *probabilitatea termodinamică* π_i astfel încît să fie satisfăcută egalitatea

$$c_i \frac{\delta(c_i T)}{(c_i T)} = k_i \frac{d\pi_i}{\pi_i}, \tag{2.78}$$

se deduce pentru diferenţiala entropiei specifice o expresie de forma

$$d\sigma_i = k_i \frac{d\pi_i}{\pi_i} \tag{2.79}$$

în care k_i are semnificaţia unei constante caracteristice fazei. Spre exemplu, în cazul unei faze reprezentate printr-un gaz perfect (ideal), constanta k_i este egală cu *constanta lui Boltzmann* (1,380662 · $\cdot 10^{-23}$ J/°K) raportată la masa gazului.

În cadrul oricărei unităţi de masă a unei faze, valoarea instantanee a energiei fiecărei particule componente este aleatoare şi, în consecinţă, există o dezordine caracterizată prin probabilitatea termodinamică π_i dată de numărul stărilor microscopice egal posibile pentru realizarea stării macroscopice corespunzătoare entropiei specifice σ_i (Boltzmann, 1884). Cu cît se reduce ecartul de variaţie a valorilor instantanee ale energiilor particulelor componente, cu atît scade dezordinea caracterizată prin probabilitatea termodinamică π_i şi implicit entropia specifică σ_i. Egalizarea valorilor instantanee ale energiilor tuturor particulelor componente nu poate fi concepută decît la un nivel de stare limită la care ar înceta complet orice agitaţie termică a particulelor şi s-ar realiza ordinea maximă corespunzătoare valorii unitare a probabilităţii termodinamice şi valorii minime $\sigma_{i\,min}$ a entropiei specifice. Integrînd ecuaţia diferenţială (2.79) între această stare limită şi starea marcată prin probabilitatea termodinamică π_i şi entropia specifică σ_i, adică

$$\int_{\sigma_{i\,min}}^{\sigma_i} d\sigma_i = k_i \int_1^{\pi_i} \frac{d\pi_i}{\pi_i},$$

se obţine relaţia

$$\sigma_i = \sigma_{i\,min} + k_i \ln \pi_i \tag{2.80}$$

conform căreia entropia specifică ar putea avea valoarea minimă $\sigma_{i\,min}$ constantă (independentă de mărimile de stare) numai dacă probabilitatea termodinamică ar fi unitară, deci dacă agitația termică a particulelor ar înceta complet și implicit temperatura ar deveni egală cu zero absolut ($T = 0°K$). Potrivit *principiului al treilea al termodinamicii* (Spacu și Săndulescu, 1966; Hutten, 1967), temperatura zero absolut nu poate fi însă atinsă, căci la această temperatură orice proces s-ar desfășura fără vreo variație a entropiei. Așadar, principiul al treilea al termodinamicii postulează că este imposibilă desfășurarea vreunui proces fără o modificare minimă a entropiei. În cazul particular al unei faze solide cu structură cristalină perfectă în care $\sigma_{i\,min}$ se anulează și relația (2.80) se reduce la *relația lui Boltzmann*

$$\sigma_i = k_i \ln \pi_i, \tag{2.81}$$

principiul al treilea al termodinamicii enunțat inițial de Nernst și Planck (Vlădea, 1965; Spacu și Săndulescu, 1966; Fermi, 1969; Kirillin et al., 1981) poate fi reformulat astfel: către zero absolut, entropia oricărui cristal pur perfect (corp cristalizat și omogen) tinde către zero.

Conform relației (2.80), entropia ansamblului celor m faze cu masa $\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i = \tilde{\rho}\mathrm{d}V$ și entropia specifică medie pe o unitate oarecare a acestei mase se prezintă respectiv cu expresiile

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i\sigma_i \mathrm{d}V_i = \sum_{i=1}^{m} \rho_i\sigma_{i\,min}\mathrm{d}V_i + \sum_{i=1}^{m} \rho_i k_i \ln \pi_i \mathrm{d}V_i$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i\sigma_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i\sigma_{i\,min}\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i k_i \ln \pi_i \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i}. \tag{2.82}$$

Dacă se folosește notația (2.73) și se mai introduc notațiile

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i\sigma_{i\,min}\mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i\sigma_{i\,min}\mathrm{d}V_i = \tilde{\sigma}_{min} \tag{2.83}$$

și

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \rho_i k_i \ln \pi_i \, \mathrm{d}V_i}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \mathrm{d}V_i} = \frac{1}{\tilde{\rho}\mathrm{d}V} \sum_{i=1}^{m} \rho_i k_i \ln \pi_i \mathrm{d}V_i = \tilde{k} \ln \tilde{\pi}, \tag{2.84}$$

atunci expresia (2.82) a entropiei specifice medii pe o unitate oarecare de masă a crustei terestre se scrie sub forma

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{min} + \tilde{k} \ln \tilde{\pi} \tag{2.85}$$

în care $\tilde{\sigma}_{min}$ este valoarea minimă a entropiei specifice medii, $\tilde{\pi}$ este probabilitatea termodinamică medie de realizare a stării macroscopice corespunzătoare aceleiași entropii specifice medii, iar $\tilde{k}$ este o constantă caracteristică pentru unitatea de masă a crustei terestre.

2.4. Relațiile termodinamice

Ca și entropia specifică medie $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(T, \tilde{\rho}) = \tilde{\sigma}(T, \tilde{p})$, pentru orice unitate de masă a crustei terestre, energia internă specifică medie $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$, entalpia specifică medie $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tilde{\sigma}, \tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$, energia liberă specifică medie $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(T, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ și entalpia liberă specifică medie $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(T, \tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ sînt mărimi de stare și deci variațiile lor infinitesimale reprezintă diferențiale totale exacte cu expresiile

$$\mathrm{d}\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\sigma}}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{\sigma} + \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{\sigma}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{\rho} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} \mathrm{d}\tilde{x}_n,$$

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\sigma}}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{\sigma} + \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\sigma}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{p} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{\tilde{\sigma}, \tilde{p}, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{\tilde{\sigma}, \tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} \mathrm{d}\tilde{x}_n,$$

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi} = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T,\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{\rho} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{T,\, \tilde{\rho},\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{T,\, \tilde{\rho},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} \mathrm{d}\tilde{x}_n$$

și

$$\mathrm{d}\tilde{\gamma} = \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T,\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{p} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{T,\, \tilde{p},\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} \mathrm{d}\tilde{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{T,\, \tilde{p},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} \mathrm{d}\tilde{x}_n$$

prin a căror identificare respectiv cu (2.74), (2.75), (2.76) și (2.77) se deduc imediat egalitățile (Tribus, 1961; Kubo, 1963; Vlădea, 1965; Zemansky, 1968; Fermi, 1969; Landau și Lifchitz, 1969; Keenan, 1970; Antropov, 1979; Kirillin et al., 1981)

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\sigma}}\right)_{\tilde{\rho},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\sigma}}\right)_{\tilde{p},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T, \tag{2.86}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{\sigma},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T,\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}, \tag{2.87}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\sigma},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T,\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{\tilde{\rho}}, \tag{2.88}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = -\tilde{\sigma} \tag{2.89}$$

și

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{\tilde{\sigma},\, \tilde{\rho},\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{\tilde{\sigma},\, \tilde{p},\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{T,\, \tilde{\rho},\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} =$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{x}_2}\right)_{T,\, \tilde{p},\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \tilde{X}^2,$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{\tilde{\sigma},\, \tilde{\rho},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} = \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{\tilde{\sigma},\, \tilde{p},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} =$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{T,\, \tilde{\rho},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} = \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{x}_n}\right)_{T,\, \tilde{p},\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_{n-1}} = \tilde{X}^n. \tag{2.90}$$

Întrucît fiecare dintre variațiile infinitesimale $d\tilde{\varepsilon}$, $d\tilde{\eta}$, $d\tilde{\varphi}$ și $d\tilde{\gamma}$ reprezintă o diferențială totală exactă de forma

$$d\tilde{\psi} = \sum_{j=0}^{n} \tilde{X}^j d\tilde{x}_j$$

în care $\tilde{X}^j = \partial\tilde{\psi} / \partial x_j$, urmează că sînt îndeplinite condițiile de integrabilitate (Rothe, 1949) prin anularea oricărei expresii $\partial\tilde{X}^j/\partial\tilde{x}_k - \partial\tilde{X}^k/\partial\tilde{x}_j$ independente de metrica spațiului (Sabac, 1965), adică

$$\frac{\partial \tilde{X}^j}{\partial \tilde{x}_k} - \frac{\partial \tilde{X}^k}{\partial \tilde{x}_j} = 0,$$

unde $j, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Pentru $j = 0$ și $k = 1$ sau $j = 1$ și $k = 0$, potrivit condițiilor de integrabilitate corespunzătoare fiecăreia dintre expresiile (2.74), (2.75), (2.76) și 2.77) ale diferențialelor $d\tilde{\varepsilon}$, $d\tilde{\eta}$, $d\tilde{\varphi}$ și $d\tilde{\gamma}$, se dispune respectiv de relațiile

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\right)\right]_{\tilde{\rho}},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}}\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\right)\right]_{\tilde{p}},$$

$$\left[\frac{\partial(-\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\rho}}\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\right)\right]_{\tilde{\rho}}$$

și

$$\left[\frac{\partial(-\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{p}}\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\right)\right]_{\tilde{p}}$$

care se prezintă sub formele

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}}\right)_{\tilde{\rho}}, \tag{2.91}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\sigma}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\sigma}}\right)_{\tilde{p}}, \tag{2.92}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T = -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} \tag{2.93}$$

și

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{p}}\right)_T = \frac{1}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}. \tag{2.94}$$

Ținînd seamă de (1.12), (2.58), (1.10), (2.60) și deci de egalitățile

$$\left(\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde\sigma}\right)_{\tilde\rho}=\left(\frac{\partial\tilde p}{\partial T}\right)_{\tilde\rho}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde\sigma}\right)_{\tilde\rho}=\frac{\tilde\alpha}{\tilde\beta}\cdot\frac{T}{\tilde c_{\tilde\rho}},$$

$$\left(\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde\sigma}\right)_{\tilde p}=\left(\frac{\partial\tilde\rho}{\partial T}\right)_{\tilde p}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde\sigma}\right)_{\tilde p}=-\tilde\alpha\,\tilde\rho\,\frac{T}{\tilde c_{\tilde p}},$$

$$\left(\frac{\partial\tilde p}{\partial T}\right)_{\tilde\rho}=\frac{\tilde\alpha}{\tilde\beta}$$

și

$$\left(\frac{\partial\tilde\rho}{\partial T}\right)_{\tilde p}=-\tilde\alpha\,\tilde\rho,$$

relațiile (2.91), (2.92), (2.93) și (2.94) se mai scriu respectiv astfel:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde\rho}\right)_{\tilde\sigma}=\frac{\tilde\alpha T}{\tilde\beta\,\tilde c_{\tilde\rho}\,\tilde\rho^2},\tag{2.95}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde p}\right)_{\tilde\sigma}=\frac{\tilde\alpha T}{\tilde c_{\tilde p}\,\tilde\rho},\tag{2.96}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde\rho}\right)_{T}=-\frac{\tilde\alpha}{\tilde\beta\,\tilde\rho^2}\tag{2.97}$$

și

$$\left(\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde p}\right)_{T}=-\frac{\tilde\alpha}{\tilde\rho}.\tag{2.98}$$

Dacă se substituie în ecuația (2.74) numai $d\tilde\sigma$ prin $(\partial\tilde\sigma/\partial T)_{\tilde\rho}\,dT+(\partial\tilde\sigma/\partial\tilde\rho)_T\,d\tilde\rho$ sau $d\tilde\sigma$ prin $(\partial\tilde\sigma/\partial T)_{\tilde p}\,dT+(\partial\tilde\sigma/\partial\tilde p)_T\,d\tilde p$ și $d\tilde\rho$ prin $(\partial\tilde\sigma/\partial T)_{\tilde p}\,dT+(\partial\tilde\rho/\partial\tilde p)_T\,d\tilde p$, în ecuația (2.75) $d\tilde\sigma$ prin $(\partial\tilde\sigma/\partial T)_{\tilde\rho}\,dT+(\partial\tilde\rho/\partial\tilde\rho)_T\,d\tilde\rho$ și $d\tilde p$ prin $(\partial\tilde p/\partial T)_{\tilde\rho}\,dT+(\partial\tilde p/\partial\tilde\rho)_T\,d\tilde\rho$ sau numai $d\tilde\sigma$ prin $(\partial\tilde\sigma/\partial T)_{\tilde p}\,dT+(\partial\tilde\sigma/\partial\tilde p)_T\,d\tilde p$, în ecuația (2.76) numai $d\tilde\rho$ prin $(\partial\tilde\rho/\partial T)_{\tilde p}\,dT+(\partial\tilde\rho/\partial\tilde p)_T\,d\tilde p$ sau numai dT prin $(\partial T/\partial\tilde p)_{\tilde\rho}\,d\tilde p+(\partial T/\partial\tilde\rho)_{\tilde p}\,d\tilde\rho$, iar în ecuația (2.77) numai $d\tilde p$ prin $(\partial\tilde p/\partial T)_{\tilde\rho}\,dT+(\partial\tilde p/\partial\tilde\rho)_T\,d\tilde\rho$ au numai dT prin $(\partial T/\partial\tilde p)_{\tilde\rho}\,d\tilde p+(\partial T/\partial\tilde\rho)_{\tilde p}\,d\tilde\rho$, atunci se obțin pentru $d\tilde\varepsilon$, $d\tilde\eta$, $d\tilde\varphi$ și $d\tilde\gamma$ expresiile

$$d\tilde\varepsilon=T\left(\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial T}\right)_{\tilde\rho}dT+\left[T\left(\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde\rho}\right)_T+\frac{\tilde p}{\tilde\rho^2}\right]d\tilde\rho+\sum_{j=2}^{n}\tilde X^j\,d\tilde x_j\tag{2.99}$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\varepsilon} = \left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\right]\mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_T\right]\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j, \tag{2.100}$$

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = \left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}\right]\mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T\right]\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.101}$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\right]\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j, \tag{2.102}$$

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi} = \left[-\tilde{\sigma} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\right]\mathrm{d}T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_T\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.103}$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi} = -\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}\mathrm{d}\tilde{p} + \left[-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\right]\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.104}$$

și

$$\mathrm{d}\tilde{\gamma} = \left[-\tilde{\sigma} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}\right]\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.105}$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\gamma} = \left[-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\right]\mathrm{d}\tilde{p} - \tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j \tag{2.106}$$

în care mărimile de stare $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\varphi}$ și $\tilde{\gamma}$ sînt reprezentate ca funcții de formele $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(T, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ sau $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(T, \tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(T, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ sau $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(T, \tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(T, \tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ sau $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ și $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(T, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ sau $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$. Prin

intermediul ultimelor expresii ale diferențialelor totale exacte $d\tilde{\varepsilon}, d\tilde{\eta}, d\tilde{\varphi}$ și $d\tilde{\gamma}$, se evidențiază relațiile suplimentare

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}, \tag{2.107}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}, \tag{2.108}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}, \tag{2.109}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{p}}\right)_T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{p}}\right)_T, \tag{2.110}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\mathrm{d} T}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}, \tag{2.111}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T, \tag{2.112}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}, \tag{2.113}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = T\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{p}}\right)_T + \frac{1}{\tilde{\rho}}, \tag{2.114}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = -\tilde{\sigma} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}, \tag{2.115}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{p}}\right)_T, \tag{2.116}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = -\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}, \tag{2.117}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}+\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}, \tag{2.118}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=-\tilde{\sigma}+\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}, \tag{2.119}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{T,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{T}, \tag{2.120}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}+\frac{1}{\tilde{\rho}} \tag{2.121}$$

şi

$$\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}, \tag{2.122}$$

iar din grupurile de relaţii {(2.107), (2.58)}, {(2.108), (2.97)}, {(2.109), (2.60), (1.10)}, {(2.110), (2.98), (1.11)}, {(2.111), (2.58), (1.12)}, {(2.112), (2.97), (1.11)}, {(2.113), (2.60)}, {(2.114), (2.98)}, {(2.115), (1.10)}, {(2.116), (1.11)}, {(2.117), (1.12)}, {(2.118), (1.10)}, {(2.119), (1.12)}, {(2.120), (1.11)}, {(2.121), (1.12)} şi {(2.122), (1.10)} se mai deduc respectiv următoarele :

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=\tilde{c}_{\tilde{\rho}}, \tag{2.123}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{T,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=\frac{1}{\tilde{\rho}^2}\left(\tilde{p}-\frac{\tilde{\alpha}T}{\tilde{\beta}}\right), \tag{2.124}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\right)_{\tilde{p},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=\tilde{c}_{\tilde{p}}-\frac{\tilde{\alpha}\tilde{p}}{\tilde{\rho}}, \tag{2.125}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\tilde{p}}\right)_{T,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\tilde{\beta}\tilde{p}-\tilde{\alpha}T\right), \tag{2.126}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho},\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ldots,\tilde{x}_n}=\tilde{c}_{\tilde{\rho}}+\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}}, \tag{2.127}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}^2}(1 - \tilde{\alpha} T), \tag{2.128}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \tilde{c}_{\tilde{p}}, \tag{2.129}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{\tilde{\rho}}(1 - \tilde{\alpha} T), \tag{2.130}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = -\left(\tilde{\sigma} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right), \tag{2.131}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{\tilde{\beta}\tilde{p}}{\tilde{\rho}}, \tag{2.132}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = -\frac{\tilde{\beta}\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}}, \tag{2.133}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right), \tag{2.134}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}} - \tilde{\sigma}, \tag{2.135}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}^2}, \tag{2.136}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\beta}\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}} \tag{2.137}$$

şi

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}\tilde{\rho}}. \tag{2.138}$$

Deoarece condiţiile de integrabilitate sînt îndeplinite pentru fiecare dintre expresiile (2.99), (2.100), (2.101), (2.102), (2.103), (2.104),

(2.105), și (2.106) ale diferențialelor $d\tilde{\varepsilon}$, $d\tilde{\eta}$, $d\tilde{\varphi}$ și $d\tilde{\gamma}$, se mai dispune de egalitățile

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}\right]\right\}_T = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\right]\right\}_{\tilde{\rho}}, \tag{2.139}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\right]\right\}_T = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_T + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_T\right]\right\}_{\tilde{p}}, \tag{2.140}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}\right]\right\}_T = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T\right]\right\}_{\tilde{\rho}}, \tag{2.141}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\right]\right\}_T = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_T + \frac{1}{\tilde{\rho}}\right]\right\}_{\tilde{p}}, \tag{2.142}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left[-\tilde{\sigma} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}}\right]\right\}_T = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_T\right]\right\}_{\tilde{p}}, \tag{2.143}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left[-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}\right]\right\}_{\tilde{p}} = \left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left[-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^2}\right]\right\}_{\tilde{\rho}}, \tag{2.144}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left[-\tilde{\sigma} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}}\right]\right\}_T = \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_T\right]\right\}_{\tilde{\rho}} \tag{2.145}$$

și

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\left[-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\right]\right\}_{\tilde{p}} = \left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left[-\tilde{\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}\right]\right\}_{\tilde{\rho}}. \tag{2.146}$$

Prin oricare dintre egalitățile (2.139), (2.141) și (2.145) se regăsește relația (2.93), prin oricare dintre egalitățile (2.140), (2.142) și (2.143) se regăsește relația (2.94), iar prin oricare dintre egalitățile (2.144) și (2.146) se găsește relația

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} = \left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial T}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \tag{2.147}$$

care se mai poate scrie, ținînd seamă de (1.12) și (1.10), astfel:

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\rho}}\right)_{\tilde{p}} = -\frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}}\left[\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\rho}}\right]. \tag{2.148}$$

În sfîrşit, pe baza relaţiilor {(2.123), (2.124)} sau {(2.125), (2.126)}, {(2.127), (2.128)} sau {(2.129), (2.130)}, {(2.131), (2.132)} sau {(2.133), (2.134)} şi {(2.135), (2.136)} sau {(2.137), (2.138)}, diferenţialele $\mathrm{d}\tilde{\varepsilon}$, $\mathrm{d}\tilde{\eta}$, $\mathrm{d}\tilde{\varphi}$ şi $\mathrm{d}\tilde{\gamma}$ se pot exprima respectiv sub formele

$$\mathrm{d}\tilde{\varepsilon} = \tilde{c}_{\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\rho}^2}\left(\tilde{p} - \frac{\tilde{\alpha}T}{\tilde{\beta}}\right)\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j \qquad (2.149)$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\varepsilon} = \left(\tilde{c}_{\tilde{p}} - \frac{\tilde{\alpha}\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\rho}}(\tilde{\beta}\tilde{p} - \tilde{\alpha}T)\,\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j, \qquad (2.150)$$

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = \left(\tilde{c}_{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}}\right)\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}^2}(1 - \tilde{\alpha}T)\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j \qquad (2.151)$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = \tilde{c}_{\tilde{p}}\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\rho}}(1 - \tilde{\alpha}T)\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\mathrm{d}\tilde{x}_j, \qquad (2.152)$$

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi} = -\left(\tilde{\sigma} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)\mathrm{d}T + \frac{\tilde{\beta}\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j \qquad (2.153)$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi} = -\frac{\tilde{\beta}\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}}\,\mathrm{d}\tilde{p} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j \qquad (2.154)$$

şi

$$\mathrm{d}\tilde{\gamma} = \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}} - \tilde{\sigma}\right)\mathrm{d}T + \frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}^2}\,\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j \qquad (2.155)$$

sau

$$\mathrm{d}\tilde{\gamma} = \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\beta}\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}}\right)\mathrm{d}\tilde{p} + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\alpha}\tilde{\rho}}\,\mathrm{d}\tilde{\rho} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\,\mathrm{d}\tilde{x}_j. \qquad (2.156)$$

2.5. Aplicaţii

2.5.1. Să se calculeze cantitatea de căldură eliberabilă prin scăderea temperaturii cu 1°K din cîte un metru cub de bazalt, diorit, gabbro, granit, piatră ponce, sienit, tuf, gneis, marmură, şist cristalin, ardezie, argilă, asfalt, calcar, dolomit, gresie, huilă, marnă şi nisip.

R e z o l v a r e. Variația cantității de căldură dintr-un volum V de rocă este dată prin produsul $\tilde{\rho} V \cdot \tilde{c}(T - T_0)$ în care $\tilde{\rho} V$, $\tilde{c}$ și $T - T_0$ reprezintă masa, căldura specifică medie și variația temperaturii rocii. Pentru $V = 1\ m^3$ și $T - T_0 = 1°K$, variația cantității de căldură devine numeric egală cu $\tilde{\rho}\tilde{c}$. Utilizînd valorile masei specifice $\tilde{\rho}$ și căldurii specifice medii $\tilde{c}$ date în tabelele 2.1 și 2.2 pentru rocile menționate, se obțin pentru produsul $\tilde{\rho}\tilde{c}$ valorile înscrise în tabelul 2.4.

Tabelul 2.4

Valorile cantității de căldură eliberabile dintr-un metru cub de rocă prin scăderea temperaturii cu 1°K.

Denumirea rocii	Cantitatea de căldură eliberabilă dintr-un metru cub de rocă prin scăderea temperaturii cu 1°K (kJ/m³.°K)
Roci vulcanice	
Bazalt	2160,0–2816,0
Diorit	1827,0–1890,0
Gabbro	2059,0–2130,0
Granit	1882,5–3660,0
Piatră ponce	370,0–900,0
Sienit	2184,0–2352,0
Tuf	1092,0–2520,0
Roci metamorfice	
Gneis	1800,0–2025,0
Marmură	2016,0–2850,0
Șist cristalin	1764,0
Roci sedimentare	
Ardezie	1987,5–2025,0
Argilă	1350,0–2080,0
Asfalt	1012,0–1380,0
Calcar	1648,2–2612,8
Dolomit	2464,0–2668,0
Gresie calcaroasă	1562,0–2288,0
Huilă	1587,6–1612,8
Marnă	1512,0–1890,0
Nisip	2024,0–2200,0
umed	3971,0–4284,5
uscat	1120,0–1666,5

2.5.2. Să se determine variația entropiei unui kilogram de calcar prin creșterea temperaturii sale de la 281°K la 341°K și prin scăderea masei sale specifice de la 2650,000 kg/m³ la 2649,404 kg/m³, știind că în această transformare calcarul are căldura specifică medie

$\tilde{c}_{\tilde{\rho}}$ de 775 J/kg. °K, coeficientul mediu de dilatație volumică izobară $\tilde{\alpha}$ de $2,4 \cdot 10^{-5}$ 1/°K și coeficientul mediu de compresibilitate izotermă $\tilde{\beta}$ de $0,243 \cdot 10^{-10}$ m²/N.

Rezolvare. Diferențiala entropiei specifice medii

$$d\tilde{\sigma} = \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} dT + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T d\tilde{\rho}$$

se poate exprima, potrivit relațiilor (2.58) și (2.97), sub forma

$$d\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{c}_{\tilde{\rho}}}{T} dT - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}\tilde{\rho}^2} d\tilde{\rho}$$

în care $\tilde{c}_{\tilde{\rho}}$ și $\tilde{\alpha}/\tilde{\beta}$ depind în general de temperatura T și de masa specifică medie $\tilde{\rho}$. Considerînd coeficienții $\tilde{c}_{\tilde{\rho}}$ și $\tilde{\alpha}/\tilde{\beta}$ cu valori medii constante pe intervalul restrîns al transformării de la $\tilde{\sigma}_0$, T_0 și $\tilde{\rho}_0$ la $\tilde{\sigma}$, T și $\tilde{\rho}$, prin integrare se deduce formula

$$\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_0 = \tilde{c}_{\tilde{\rho}} \ln \frac{T}{T_0} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0}\right).$$

Din aplicarea acestei formule rezultă că

$$\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_0 = 775 \cdot \ln \frac{341}{281} + \frac{2,4 \cdot 10^{-5}}{0,243 \cdot 10^{-10}} \left(\frac{1}{2649,404} - \frac{1}{2650,000}\right) \approx$$

$$\approx 150,06 \frac{J}{kg \cdot °K} = 150,06 \frac{N \cdot m}{kg \cdot °K}.$$

2.5.3. Să se calculeze variațiile izocore și izobare ale entropiei specifice în raport cu temperatura, la 273,15 °K, pentru bioxid de carbon, hidrogen sulfurat și metan.

Rezolvare. Aplicînd relațiile (2.58) și (2.60) în care T are valoarea de 273,15°K, iar $\tilde{c}_{\tilde{\rho}}$ și $\tilde{c}_{\tilde{p}}$ au valorile date în tabelul 2.2, se obține pentru bioxid de carbon

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{\rho}} = \frac{0,63 \cdot 10^3}{273,15} = 2,30642 \frac{J}{kg}, \quad \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} = \frac{0,82 \cdot 10^3}{273,15} = 3,00201 \frac{J}{kg};$$

pentru hidrogen sulfurat

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} = \frac{0{,}85 \cdot 10^3}{273{,}15} = 3{,}11184\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}\,;\ \left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} = \frac{1{,}11 \cdot 10^3}{273{,}15} = 4{,}06370\,\frac{J}{\text{kg}}$$

şi pentru metan

$$\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} = \frac{1{,}67 \cdot 10^3}{273{,}15} = 6{,}11386\,\frac{\text{J}}{\text{kg}},\ \left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial T}\right)_{\tilde{p}} = \frac{2{,}18 \cdot 10^3}{273{,}15} = 7{,}98096\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}\,.$$

2.5.4. La temperatura de 300°K şi pe intervalul de presiune de la $0{,}980665 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2 = 1$ at la $490{,}3325 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2 = 500$ at, să se evalueze variaţiile izoentropice ale temperaturii în raport cu masa specifică şi cu efortul unitar sau presiunea pentru cuarţ şi pentru calcar.

Rezolvare. Potrivit relaţiilor (2.95) şi (2.96) în care $T = 300\,°\text{K}$ precum şi datelor din tabelele 1.1, 1.2, 2.1 şi 2.2, se găseşte pentru cuarţ

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \frac{0{,}15 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{0{,}255 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}78 . 10^3 \cdot [(2{,}50 \ldots 2{,}80) \cdot 10^3]^2} =$$

$$= (0{,}28858 \ldots 0{,}36199) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}^3 \cdot °\text{K}}{\text{kg}}$$

şi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \frac{0{,}15 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{0{,}78 \cdot 10^3 \cdot (2{,}50 \ldots 2{,}80) \cdot 10^3} =$$

$$= (0{,}20604 \ldots 0{,}23077) \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{m}^2 \cdot °\text{K}}{\text{N}},$$

iar pentru calcar

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \frac{2{,}40 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{0{,}243 \cdot 10^{-10} \cdot (0{,}67 \ldots 0{,}92) \cdot 10^3 \cdot [(2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3]^2} =$$

$$= (3{,}99302 \ldots 7{,}30771) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}^3 \cdot °\text{K}}{\text{kg}}$$

şi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{p}}\right)_{\tilde{\sigma}} = \frac{2{,}40 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{(0{,}67 \ldots 0{,}92) \cdot 10^3 \cdot (2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3} =$$

$$= (2{,}75566 \ldots 4{,}36840) \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{m}^2 \cdot °\text{K}}{\text{N}}\,.$$

2.5.5. Să se determine variațiile izoterme ale entropiei în raport cu masa specifică și cu efortul unitar sau presiunea pentru cuarț și pentru calcar.

Rezolvare. Pe baza relațiilor (2.97) și (2.98) precum și a datelor din tabelele 1.1, 1.2 și 2.1 se obține pentru cuarț

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T = -\frac{0,15 \cdot 10^{-5}}{0,255 \cdot 10^{-10} \cdot [(2,50 \ldots 2,80) \cdot 10^3]^2} =$$

$$= -(0,09412 \ldots 0,07503) \cdot 10^{-1} \frac{\mathrm{N \cdot m^4}}{\mathrm{kg^2 \cdot {}^\circ K}}$$

și

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{p}}\right)_T = -\frac{0,15 \cdot 10^{-5}}{(2,50 \ldots 2,80) \cdot 10^3} = -(0,60000 \ldots 0,53571) \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot {}^\circ K}},$$

iar pentru calcar

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_T = -\frac{2,40 \cdot 10^{-5}}{0,243 \cdot 10^{-10} \cdot [(2,46 \ldots 2,84) \cdot 10^3]^2} =$$

$$= -(1,63205 \ldots 1,22453) \cdot 10^{-1} \frac{\mathrm{N \cdot m^4}}{\mathrm{kg^2 \cdot {}^\circ K}}$$

și

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{p}}\right)_T = -\frac{2,40 \cdot 10^{-5}}{(2,46 \ldots 2,84) \cdot 10^3} = -(9,75610 \ldots 8,45070) \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot {}^\circ K}}.$$

2.5.6. Temperatura de 328°K și presiunea de $4 \cdot 10^7 \mathrm{N/m^2}$ corespunzătoare unei adîncimi medii de 1500 — 1600 m în crusta terestră, să se calculeze, pentru calcar, variațiile izoterme ale energiei interne specifice și entalpiei specifice în raport cu masa specifică și cu presiunea, precum și ale energiei libere specifice în raport cu presiunea și entalpiei libere specifice în raport cu masa specifică.

Rezolvare. Utilizînd relațiile (2.124), (2.126), (2.128), (2.130), (2.132) și (2.136) precum și datele din tabelele 1.1, 1.2 și 2.1, rezultă că

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{[2,46 \ldots 2,84) \cdot 10^3]^2}\left(4 \cdot 10^7 - \frac{2,40 \cdot 10^{-5} \cdot 328}{0,243 \cdot 10^{-10}}\right) =$$

$$= -(46,92157 \ldots 35,20514) \frac{\mathrm{J \cdot m^3}}{\mathrm{kg^2}},$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} =$$

$$= \frac{1}{(2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3} (0{,}243 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^7 - 2{,}40 \cdot 10^{-5} \cdot 328) =$$

$$= -(2{,}80488 \ldots 2{,}42958) \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}},$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} =$$

$$= \frac{1}{0{,}243 \cdot 10^{-10} \cdot [(2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3]^2} (1 - 2{,}40 \cdot 10^{-5} \cdot 328) =$$

$$= (5{,}06203 \ldots 6{,}74670) \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}^2},$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{(2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3} (1 - 2{,}40 \cdot 10^{-5} \cdot 328) =$$

$$= (3{,}49341 \ldots 4{,}03304) \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}},$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{p}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{0{,}243 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^7}{(2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3} =$$

$$= (3{,}42254 \ldots 3{,}95122) \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$

şi

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{\rho}}\right)_{T, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n} = \frac{1}{0{,}243 \cdot 10^{-10} \cdot [(2{,}46 \ldots 2{,}84) \cdot 10^3]^2} =$$

$$= (5{,}10219 \ldots 6{,}80023) \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}^2}.$$

Bibliografie

ANDERSON, C. A., BRIDWELL, R. J. (1981). *A finite element method for studying the transient nonlinear thermal creep of geological structures*, Int. J. Num. Anal. Methods Geomech, **4**, p. 255–276.

ANTROPOV, L. (1979). *Électrochimie théorique* (traduit du russe), Chap. I. 2, p. 24–34, Éditions Mir, Moscou.

ARTYUSHKOV, E. V. (1981). *Mechanisms of continental riftogenesis*, Tectonophysics, **73**, p. 9–14, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

BAZAROV, I. P. (1962). *Termodinamica* (trad. din limba rusă), Editura tehnică, București.

BERNARD, J., EVANO, J. F. (1975). *Définition d'un Modèle Applicable à la Géothermie Off-Shore par Fracturation Nucléaire*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1547–1553.

BIRCH, F. (1955). *Physics of the Crust*, Geol. Soc. Amer. Spec. Paper, **62**, p. 101–118.

BOLTZMANN, L. (1884). *Wied. Ann.*, **22**, 31, 291.

BOLTZMANN, L. (1896–1898). *Vorlesungen über Gastheorie*, vol. I, II, Zusammenfassende Darstellung, J. A. Barth, Leipzig.

BOSWORTH, W. (1981). In: The Effect of Deformation on Rocks (ed. G. S. Lister, H. J. Behr, K. Weber and H. J. Zwart), *Strain-induced preferential dissolution of halite*, Tectonophysics, **78**, p. 509–525, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

BRACE, W. F., WALSH, J. B. (1962). *Some direct measurements of the surface energy of quartz and orthoclase*, Amer. Min., **47**, p. 1111–1122.

BROECKER, W. S., OVERSBY, M. V. (1971). *Chemical equilibria in the Earth*, McGraw-Hill Book Company, New York – St. Louis – San Francisco – Düsseldorf – London – Mexico – Panama – Sydney – Toronto.

BRUSH, S. G. (1970). *Kinetische Theorie*, vol. 2, p. 17–27, 115, 226–301, Akademie-Verlag, Pergamon Press, Oxford; Vieweg und Sohn, Braunschweig.

CARNOT, N. L. S. (1824). *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (mémoire), Paris.

CHRISTENSEN, R. M. (1971). *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*, Acad. Press, New York – London.

CLAPEYRON, B. P. É. (1834). *Mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur*, Journal de l'École Polytechnique, Paris.

DAVIDESCU, AL. (1964). *Termodinamica*, Editura didactică și pedagogică, București.

EPSTEIN, P. (1937). *Thermodynamics*, Wiley, New York.

FAUST, CH. R., MERCER, J. W. (1975). *Mathematical Modeling of Geothermal Systems*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1635–1641.

FERMI, E. (1969). *Termodinamica* (trad. din limba engleză), Editura științifică, București.

FITTS, D. D. (1962). *Non-Equilibrium Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York.

FLAMM, D., BRODA, E., KLEIN, M. J. (1973). *The Boltzmann equation* (ed. E. G. D. Cohen and W. Thirring), Springer-Verlag, Wien.

FYFE, W. S., TURNER, J. F., VERHOOGEN, J. (1962). *Metamorficeskie reakții i metamorficeskie fații*, Izd. Inostr. Lit. Moskva.

GARG, S. K., PRITCHETT, J. W., BROWNELL, D. H. JR. (1975). *Transport of Mass and Energy in Porous Media*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1651–1656.

GIBBS, J. W., (1877). *On the equilibrium of heterogeneous substances*, Part II, Trans. Conn. Acad., **3**, p. 343–524.

GUTSHALL, L., BRYANT, P. J., COLE, G. M. (1970). *Cleavage surface energy of phlogopite mica*, Amer. Min., 55, 7–8, p. 1432–1434.

HUTTEN, E. H. (1967). *The Ideas of Physics*, Chap. 5, *Contemporary Science Paperback*, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh.

ILLIES, H., GREINER, G. (1976). *Regionales stress-Feld und Neotektonik in Mitteleuropa*, Oberrhein. Geol. Abh., **25**, p. 1–40.

JUHÁSZ, J. (1976). *Hidrogeológia*, Elsö rész. Altalános teleptan, p. 148–159, Akadémiai Kiadó, Budapest.

KARAPETIANȚ, M. H. (1957). *Termodinamica chimică* (trad. din limba rusă), Editura tehnică, București.

KEENAN, J. H. (1970). *Thermodynamics*, MIT Press, Cambridge, Mass.

KERN, R., WEISBROD, A. (1964). *Thermodynamique de base pour minéralogistes, pétrographes et géologues*, Masson et Cie, Paris.

KIRILLIN, V. A., SYCHEV. V. V., SHEINDLIN, A. E. (1981). *Engineering Thermodynamics* (translated from the Russian, Second printing), Mir Publishers, Moscow.

KUBO, R. (1963). *Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1969). *Électrodynamique des milieux continus* (traduit du russe), Physique théorique, tome VIII, Chap. II, p. 70–115, Éditions Mir, Moscou.

LEONTOVICI, M. A. (1954). *Introducere în termodinamică* (trad. din limba rusă), Editura tehnică, București.

LYKOV, A. V. (1966). *Application of irreversible thermodynamics to investigation of heat and mass transfer*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, **9**, 139.

NEUGEBAUER, H. J., TEMME, P. (1981). *Crustal uplift and the propagation of failure zones*, Tectonophysics, **73**, p. 33–51, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

NRIAGU, J. O. (1975). *Thermochemical Approximations for clay minerals*, Amer. Min., **60**, 834–839.

RABOTNOV, YU. N. (1980). *Elements of Hereditary Solid Mechanics* (translated from the Russian), Mir Publishers, Moscow.

ROBIE, R. A., WALDBAUM, D. R. (1968). *Thermodynamic properties of minerals and related substances at 298,15 K* (25,0°C) *and one atmosphere* (1,013 *bars*) *pressure and at higher temperatures*, Geol. Survery Bull. **1259**, United St. Govern Printing Office, Washington.

ROTHE, R. (1949). *Matematici superioare* (trad. din limba germană după ediția a patra), vol. III, p. 37–44, Oficiul de presă, editură și documentare C.F.R., București.

SABAC, I. GH. (1965). În : Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. VI, p. 579–593, Editura tehnică, București.

SCHMIDT, E. (1958). *Technische Thermodinamik*, Springer-Verlag, Berlin.

SECLĂMAN, M. (1981). *Introducere în termodinamica sistemelor și proceselor minerale*, Editura Acad. R.S.R., București ..

SOO, S. L. (1962). *Analytical Thermodynamics*, Prentice-Hall International, London.

SPACU, P., SĂNDULESCU, D. (1966). In : Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. II, *Chimie generală*, Cap. 2, p. 717—744, Editura tehnică, București.

SYCHEV, V. V. (1973). *Complex Thermodynamic Systems*, Plenum Press, New York.

THOMPSON, J. JR. (1958). *The thermodynamic basis for the mineral facies concept*, Amer. J. Sci., 253, 2 february.

TRIBUS, M. (1961). *Thermostatics and Thermodynamics*, Van Nostrand, Princeton, N. J.

VLĂDEA, I. (1965). In : Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. VII, p. 1125—1159, Editura tehnică, București.

VULKALOVICI, M. P. (1956). *Termodinamica tehnică* (2 vol.), Editura energetică, București.

ZEMANSKY, M. W. (1968). *Heat and Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York.

* * * (1920). In : Hütte-Manuel de l'Ingénieur (ed. Ch. Béranger ; traduit du allemande ; dix-neuvième édition), tome premier, 5e section, Chap. I, p. 463—467, Librairie polytechnique, troisième tirage, Paris-Liége.

* * * (1949). In : Manual pentru beton armat (ediția a doua), *Date relative la greutăți și încărcări*, p. 146—153, Editura tehnică (Editura AGIR), București.

«O dezvoltare ulterioară a teoriei căldurii și corelarea legilor de bază ale termodinamicii — considerînd căldura ca energie de mișcare a particulelor extrem de mici, moleculele, din care sînt formate toate corpurile materiale — a fost realizată în ultimul sfert al secolului trecut, îndeosebi de către Ludwig Boltzmann, în Germania, James Clerk Maxwell, în Anglia și Josiah Gibbs, în S.U.A. Luînd în considerare mișcarea nenumăratelor molecule extrem de mici care alcătuiesc corpurile materiale, este, desigur, imposibil și, de asemenea, lipsit de sens să urmărești cu precizie traiectoria fiecărei particule individuale. Ceea ce dorim să cunoaștem este comportarea medie a moleculelor în anumite condiții fizice diferite care ne conduc la utilizarea legilor statisticii.»

GEORGE GAMOW

3. Reprezentarea generală a transmiterii căldurii

3.1. Propagarea căldurii prin conducție și convecție

Distribuția nepermanentă și neuniformă a căldurii în crusta terestră implică, potrivit principiului al doilea al termodinamicii, redistribuirea sa prin difuzivitate în sensul descreșterii entalpiei (conținutului de căldură). Dacă difuzivitatea elementară se reprezintă prin scăderea infinitesimală a entalpiei multiplicate printr-un *coeficient de difuzivitate* $\tilde{\chi}$ (vezi tabelul 3.1), atunci difuzivitatea elementară pe unitatea de cantitate de căldură se poate exprima, utilizînd identitatea termodinamică (2.152), sub forma

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\mathrm{d}\tilde{\eta} = -\frac{\tilde{\chi}}{T}\mathrm{d}T - \frac{\tilde{\chi}(1-\tilde{\alpha}T)}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\mathrm{d}\tilde{p} - \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\mathrm{d}\tilde{x}_{j}$$

în care atît entalpia specifică medie $\tilde{\eta}$, cît și temperatura T, efortul unitar mediu sau presiunea medie $\tilde{p}$ și celelalte mărimi extensive $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n$ sînt cîmpuri definite ca funcții scalare de timp și de punct pe domeniul crustei terestre. Prin dezvoltarea obișnuită

Tabelul 3.1.

Valorile coeficientului de difuzivitate termică pentru unele roci vulcanice, metamorfice și sedimentare

Denumirea rocii	Coeficientul de difuzivitate termică ($10^{-6}m^2/s$)	Sursa de informație
Roci vulcanice		
Bazalt	0,595—0,775	Davidescu (1965)
	0,413—2,154	Juhász (1976)
Diorit	4,307—4,456	Juhász (1976)
Gabbro	3,276—3,389	Juhász (1976)
Granit	1,589—6,178	Juhász (1976)
Sienit	2,472—2,662	Juhász (1976)
Roci metamorfice		
Marmură	0,408—4,615	Juhász (1976)
Șist cristalin	1,000—1,500	Čermák (1976)
	1,978—2,637	Juhász (1976)
Roci sedimentare		
Argilă	1,230—4,307	Juhász (1976)
Calcar	2,226—5,645	Juhász (1976)
de Băile Felix — 1 Mai	1,042—3,704	Albu și Pricăjan (1980)
Dolomit	0,022—0,078	Davidescu (1965)
	4,795—5,664	Juhász (1976)
Gresie	0,813—1,191	Davidescu (1965)
	3,151—8,190	Juhász (1976)
Huilă	0,141—0,177	Davidescu (1965)
Marnă	2,114—2,873	Juhász (1976)
Nisip		
umed	0,325	Juhász (1976)
uscat	0,274	Juhász (1976)

a diferențialelor acestor cîmpuri nestaționare se obțin pentru difuzivitatea elementară pe unitatea de cantitate de căldură expresiile

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\,d\tilde{\eta} = -\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}dt - \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\vec{r}}d\vec{r}$$

și

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\,d\tilde{\eta} = -\left[\frac{\tilde{\chi}}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tilde{\chi}(1-\tilde{\alpha}T)}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} + \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\frac{\partial\tilde{x}_j}{\partial t}\right]dt -$$

$$-\left[\frac{\tilde{\chi}}{T}\frac{\partial T}{\partial\vec{r}} + \frac{\tilde{\chi}(1-\tilde{\alpha}T)}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\vec{r}} + \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\frac{\partial\tilde{x}_j}{\partial\vec{r}}\right]d\vec{r}$$

din a căror identificare rezultă egalitățile

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}=-\frac{\tilde{\chi}}{T}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\tilde{\chi}(1-\tilde{\alpha}T)}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\frac{\partial\tilde{x}_{j}}{\partial t}\tag{3.1}$$

și

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\vec{r}}=-\frac{\tilde{\chi}}{T}\frac{\partial T}{\partial\vec{r}}-\frac{\tilde{\chi}(1-\tilde{\alpha}T)}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\vec{r}}-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\frac{\partial\tilde{x}_{j}}{\partial\vec{r}},\tag{3.2}$$

unde dt și $d\vec{r}$ sînt diferențialele timpului t și vectorului de poziție $\vec{r}$, iar $\partial/\partial t$ și $\partial/\partial\vec{r}\equiv\mathrm{grad}$ reprezintă operatorii derivată locală și respectiv gradient. Evidențiind *viteza medie de transmitere a căldurii*

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\,\mathrm{grad}\;\tilde{\eta}=\vec{\mathfrak{w}}\tag{3.3}$$

care se compune din *viteza medie de propagare prin conducție*

$$-\frac{\tilde{\chi}}{T}\,\mathrm{grad}\;T=\vec{\tilde{w}}\tag{3.4}$$

și din *viteza medie rezultantă de propagare prin convecție*

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{grad}\;\tilde{p}+\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\,\mathrm{grad}\;\tilde{x}_{j}\right)=\vec{\tilde{v}},\tag{3.5}$$

se poate scrie conform egalității (3.2):

$$\vec{\mathfrak{w}}=\vec{\tilde{w}}+\vec{\tilde{v}}.\tag{3.6}$$

În general, o unitate de volum al crustei terestre este constituită dintr-o fracțiune m_e ocupată de componente dinamic active și din fracțiunea complementară $(1-m_e)$ ocupată de componente dinamic inactive, astfel încît un volum elementar dV de crustă terestră este reprezentat prin suma $m_e\,dV+(1-m_e)\,dV$. Dacă, în temperatura T în interiorul volumului dV considerat, componentele dinamic active și cele dinamic inactive se prezintă respectiv cu masele specifice ρ și ρ^*, cu presiunea p și efortul unitar p^* și cu căldurile specifice c_p și $c_{p^*}^*$, atunci ansamblul acestor componente se prezintă, potrivit notației (2.12), cu masa specifică medie

$$\tilde{\rho}=\rho m_e+\rho^*(1-m_e),\tag{3.7}$$

potrivit notației (2.13), cu efortul unitar mediu sau presiunea medie

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{\rho}}{\mathrm{d}\tilde{\rho}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} p m_e + \frac{\mathrm{d}\rho^*}{\rho^*} p^* (1 - m_e)\right] \tag{3.8}$$

și, potrivit notațiilor (2.50), (2.22) și (2.54), cu căldura specifică medie

$$\tilde{c}_{\tilde{p}} = \frac{\rho c_p m_e + \rho^* c^*_{p*}(1 - m_e)}{\tilde{\rho}}. \tag{3.9}$$

Întrucît unitatea de masă a componentelor dinamic active are un impuls relativ $\vec{u}$ nenul față de impulsul considerat nul al unității de masă a componentelor dinamic inactive, iar căldura se propagă deci prin conducție și convecție cu viteza rezultantă $\vec{w} + \vec{u}$ în componentele dinamic active și numai prin conducție cu viteza $\vec{w}^*$ în componentele dinamic inactive, urmează că transmiterea căldurii prin ansamblul acestor componente se realizează (Albu și Pricăjan, 1 980; Albu și Enăchescu, 1981) cu viteza medie rezultantă

$$\vec{\tilde{w}} = \frac{\rho c_p T m_e(\vec{w} + \vec{u}) + \rho^* c^*_{p*} T(1 - m_e)\vec{w}^*}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T} =$$

$$= \frac{\rho c_p m_e \vec{w} + \rho^* c^*_{p*}(1 - m_e)\vec{w}^*}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} + \frac{\rho c_p m_e \vec{u}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} \tag{3.10}$$

în care

$$\frac{\rho c_p m_e \vec{w} + \rho^* c^*_{p*}(1 - m_e)\vec{w}^*}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} = \vec{\tilde{w}} \tag{3.11}$$

și

$$\frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} m_e \vec{u} = \vec{\tilde{v}} \tag{3.12}$$

reprezintă, conform cu (3.6), vitezele medii de propagare a căldurii prin conducție și respectiv prin convecție în ansamblul componentelor din volumul elementar $\mathrm{d}V$.

3.2. Fluxul de termoconducție și termoconvecție

Din motive de comoditate matematică, atît propagarea căldurii (Cattaneo, 1948–1949, 1958; Morse și Feshbach, 1953; Vernotte, 1958; Kaliski, 1965; Gurtin și Pipkin, 1968; Tye, 1969; Meixner, 1970; Taitel, 1972) cît și a capacității calorice (calorifice) în crusta terestră se interpretează ca deplasări de medii continue echivalente din punct de vedere termodinamic, care se caracterizează respectiv prin cîmpurile vitezelor medii $\vec{\tilde{w}} = \vec{\tilde{w}}(t, P)$ și $\vec{\tilde{v}} = \vec{\tilde{v}}(t, P)$ definite prin (3.3) și (3.5) sau prin (3.10) și (3.12) ca funcții vectoriale de timp și de punct pe domeniul crustei terestre. Urmărind aceste medii continue în deplasare, se poate presupune că ele sînt formate din porțiuni asociate cantităților elementare de căldură $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{d}V = \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T(t, p)\,\mathrm{d}V$ și capacităților calorice elementare $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V = \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}(t, P)\,\mathrm{d}V$ corespunzătoare volumelor elementare $\mathrm{d}V$ atașate punctelor P în mișcare cu vitezele $\vec{\tilde{w}}(P)$ și respectiv $\vec{\tilde{v}}(P)$ reluate însă ca funcții numai de punct, astfel încît variațiile cantității de căldură și capacității calorice dintr-un volum variabil $V(t)$ de mediu continuu (continuum) se exprimă, pentru orice proces desfășurat într-un interval infinitesimal de timp $\mathrm{d}t$, prin intermediul derivatelor substanțiale

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)}\left[\frac{\delta(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\mathrm{d}t} + \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{div}\,\vec{\tilde{w}}\right]\mathrm{d}V \tag{3.13}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\mathrm{d}t} + \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{div}\,\vec{\tilde{v}}\right]\mathrm{d}V \tag{3.14}$$

notate cu simbolurile diferite δ și d pentru variațiile dependentă și respectiv independentă de transformările intermediare. Dacă se utilizează dezvoltările

$$\frac{\delta(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\partial t} + \vec{\tilde{w}}\ \mathrm{grad}\,(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T)$$

și

$$\frac{\mathrm{d}(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t} + \vec{\tilde{v}}\ \mathrm{grad}\,(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})$$

precum şi formulele de analiză vectorială

$$\vec{\tilde{w}} \text{ grad } (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T) + \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T \operatorname{div} \vec{\tilde{w}} = \operatorname{div} (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}})$$

şi

$$\vec{\tilde{v}} \text{ grad } (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}) + \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} \operatorname{div} \vec{\tilde{v}} = \operatorname{div} (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\vec{\tilde{v}}),$$

atunci se obţin pentru derivatele substanţiale (3.13) şi (3.14) expresiile

$$\frac{\delta}{dt}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T \, dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\partial t} dV + \int\limits_{V(t)} \operatorname{div} (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}}) \, dV \quad (3.15)$$

şi

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} \, dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t} dV + \int\limits_{V(t)} \operatorname{div} (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\vec{\tilde{v}}) \, dV. \quad (3.16)$$

Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski, potrivit căreia

$$\int\limits_{V(t)} \operatorname{div} (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}}) \, dV = \oint\limits_{\Omega(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}} \, d\vec{\Omega}$$

şi

$$\int\limits_{V(t)} \operatorname{div} (\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\vec{\tilde{v}}) \, dV = \oint\limits_{\Omega(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\vec{\tilde{v}} \, d\vec{\Omega},$$

din (3.15) şi (3.16) rezultă respectiv că

$$\frac{\delta}{dt}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T \, dV + \oint\limits_{\Omega(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}} \, d\vec{\Omega} \quad (3.17)$$

şi

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} \, dV + \oint\limits_{\Omega(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\vec{\tilde{v}} \, d\vec{\Omega}, \quad (3.18)$$

unde $d\vec{\Omega} = \vec{n}\, d\Omega$ este elementul suprafeţei închise $\Omega(t)$ care mărgineşte volumul $V(t)$ cu sensul normalei de versor $\vec{n}$ spre exteriorul

lui $V(t)$. Conform expresiilor (3.17) și (3.18), derivatele substanțiale ale cantității de căldură și capacității calorice dintr-un volum variabil $V(t)$ sînt compuse din derivatele lor locale însumate cu fluxurile vectorilor $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}}$ și respectiv $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\vec{\tilde{v}}$ prin suprafața închisă $\Omega(t)$ care delimitează volumul $V(t)$. *Densitatea fluxului (fluxul unitar) de căldură* $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}}$ preluată din (3.3) cu expresia

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}} = -\tilde{\rho}\tilde{\chi}\ \mathrm{grad}\ \tilde{\eta}$$

rezultă din însumarea vectorială a densităților fluxurilor de căldură prin conducție $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}}$ și prin convecție $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{v}}$ care se prezintă, potrivit cu (3.4) și respectiv cu (3.12) și (3.5), astfel:

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}} = -\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\tilde{\chi}\ \mathrm{grad}\ T$$

și

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{v}} = \rho c_p T m_e\vec{u} = -\tilde{\rho}\tilde{\chi}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\mathrm{grad}\ \tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\ \mathrm{grad}\ \tilde{x}_j\right).$$

Evidențiind *coeficientul de conductibilitate termică*

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\tilde{\chi} = \tilde{\varkappa} \tag{3.19}$$

(vezi tabelele 3.2 și 3.3 cu valorile acestui coeficient pentru unele substanțe componente ale crustei terestre și pentru apă), se relevă că *densitatea fluxului de termoconducție* este exprimată (Maizeli, 1951; Carslaw și Jaeger, 1959; Boli și Ueiner, 1964; Davidescu, 1965; Landau și Lifchitz, 1971; Prusov, 1978; Kikoïne și Kikoïne, 1979) prin *legea lui Fourier*

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{w}} = -\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T, \tag{3.20}$$

iar *densitatea fluxului de termoconvecție* este dată printr-o lege de forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\vec{\tilde{v}} = \rho c_p T m_e\vec{u} = -\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\mathrm{grad}\ \tilde{p} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^j\ \mathrm{grad}\ \tilde{x}_j\right) \tag{3.21}$$

prin care se reunesc formele particulare ale legilor liniare de propagare a căldurii prin filtrație (Hubbert, 1940; Jacob, 1950; Polubarinova-Kocina, 1962; De Wiest 1969; Albu, 1981), prin dis-

Tabelul 3.2

Valorile coeficientului de conductibilitate termică pentru unele substanţe componente ale crustei terestre

Denumirea substanţei	Coeficientul de conductibilitate termică (W/m.°K)	Sursa de informaţie
1	2	3
Elemente native		
Argint	400,07–423,33	Davidescu (1965)
Aur	310,52	
Carbon		
grafit	11,63–174,45	
Cupru	357,04–391,93	
Minerale		
Anhidrit		
permian superior	4,01	Hurtig şi Schlosser (1976)
triasic	3,80	şi
Azbest	0,03–2,17	Davidescu (1965)
Biotit	2,00–2,50	Hurtig şi Schlosser (1976)
Calcit		
paralel cu axele cristalografice principale	4,20	
Caolin	0,29–0,42	Davidescu (1965)
Cuarţ		
perpendicular pe axele cristalografice principale	6,70	Hurtig şi Schlosser (1976)
paralel cu axele cristalografice principale	13,40	
Gips	3,49	Juhász (1976)
Sare gemă	11,20	Clark (1966)
Roci vulcanice		
Amfibolit, gabbro şi bazalt	2,30	Kutas (1979)
Andezit	3,30	Clark (1966)
Bazalt	1,67	Davidescu (1965)
	1,84	Hurtig şi Schlosser (1976)
	1,16–4,65	Juhász (1976)
	2,10	Kutas (1979)
Diabaz	5,81–6,98	Juhász(1976)
Diorit	8,14	
Dunit	15,12	
Gabbro	6,98	
Granit	2,40	Clark (1966)
	2,10	Bernard şi Evano (1975)
	2,50	Gable (1979)
Melafir		
permian inferior	1,50	Hurtig şi Schlosser (1976)
Porfir		
permian inferior	1,97	

(continuare tabel 3.2)

1	2	3
Riolit	3,10— 3,60	Clark (1966)
Sienit	2,60— 3,90	
	5,81	Juhász (1976)
Trahit	4,65	
Tuf		
permian inferior	1,80	Hurtig şi Schlosser(1976)
Roci metamorfice		
Cuarţit	5,40	Clark (1966)
	7,10	Hurtig şi Schlosser (1976)
	3,90	Kutas (1979)
Gneis	2,00— 3,60	Clark (1966)
Gneis şi şist micaceu	2,13	Hurtig şi Schlosser (1976)
Marmură	1,16— 9,30	
Serpentinit	6,98— 8,14	Juhász (1976)
Şist cristalin	3,49— 4,65	
	3,51	Jones şi Oxburgh (1979)
Roci sedimentare		
Argilă	0,90— 2,50	Čermák (1976)
	1,67	Hurtig şi Schlosser (1976)
	1,22	Plewa (1976)
ordoviciană	1,71	Hurtig şi Schlosser (1976)
carboniferă	1,20— 1,80	Clark (1966)
carboniferă superioară	1,95— 2,52	
permo-carboniferă	1,96	
permiană inferioară	1,84	
permiană superioară	1,84	Hurtig şi Schlosser (1976)
triasică	1,38— 1,80	
jurasică	1,76	
liasică inferioară	1,38	Jones şi Oxburgh (1979)
kimmeridgiană	1,28	
cretacică	1,84	
Argilă şi gresie siltică	3,14	Hurtig şi Schlosser (1976)
Argilă şi marnă argiloasă	2,50— 2,70	
Calcar	2,10— 2,90	Clark (1966)
	2,50— 3,00	Čermák (1976)
	3,30	Hurtig şi Schlosser (1976)
	2,90	Gable (1979)
carbonifer inferior	2,42— 2,44	Hurtig şi Schlosser (1976)
carbonifer	3,47	Jones şi Oxburgh (1979)
permian inferior	1,76	
permian superior	2,26	
triasic	2,09	Hurtig şi Schlosser (1976)
jurasic	3,10	
cretacic	2,89	
eocen	3,99	Salát (1968)
Calcar şi marnă calcaroasă	3,14	Hurtig şi Schlosser (1976)
Cărbune	0,35— 0,93	Juhász (1976)
	0,31	Jones şi Oxburgh (1979)

(continuare tabel 3.2)

1	2	3
Conglomerat	2,90– 3,30	Clark (1966)
	2,90	Gable (1979)
permian inferior	2,01	Hurtig și Schlosser (1976)
Cretă	9,10	Clark (1966)
	0,88– 1,64	Plewa (1976)
	1,92	Jones și Oxburgh (1979)
Dolomit	0,06– 0,19	Davidescu (1965)
	4,10	Clark (1966)
permian superior	3,93	Hurtig și Schlosser (1976)
triasic	2,68– 3,51	
Gresie	1,86	Davidescu (1965)
	1,20– 3,50	Čermák (1976)
	4,94	Hurtig și Schlosser (1976)
	2,90	Gable (1979)
	3,31	Jones și Oxburgh (1979)
cambriană	2,98– 4,24	Plewa (1976)
carboniferă	2,50– 3,20	Clark (1966)
carboniferă superioară	3,44– 3,82	
permo-carboniferă	3,42	
permiană inferioară	2,51	Hurtig și Schlosser (1976)
triasică	2,38– 2,47	
jurasică	2,22	
cretacică	2,30	
cuarțitică	5,54	Plewa (1976)
siltică	0,90– 2,30	Čermák (1976)
	2,22	Jones și Oxburgh (1979)
ordoviciană	2,55	
carboniferă superioară	2,65– 3,02	
permo-carboniferă	2,63	
permiană inferioară	2,13	Hurtig și Schlosser (1976)
triasică	1,55– 1,59	
jurasică	1,09	
cretacică	1,30	
terțiară	0,84	
miocenă cu dolomit triasic și calcar jurasic	3,56	Horváth et al. (1977)
Gresie și comglomerat permiene superioare	2,72	Boldizsár (1997)
	3,09	Salát (1967)
Gresie și marnă oligocene superioare	2,14	Boldizsár(1965)
Huilă	0,27	Davidescu (1965)
Marnă	1,97	Jones și Oxburgh (1979)
carboniferă inferioară	2,22–2,23	Hurtig și Schlosser (1976)
permiană	1,70–2,70	Clark (1966)

(continuare tabel 3.2)

1	2	e
triasică	1,50– 1,84	Hurtig şi Schlosser (1976)
jurasică	1,63	Hurtig şi Schlosser (1976)
cretacică	1,13	Hurtig şi Schlosser (1976)
argiloasă triasică	1,63– 2,30	Hurtig şi Schlosser (1976)
calcaroasă şi nisipoasă miocenă şi panoniană inferioară	1,84	Boldizsár (1959)
Marnă şi gresie	2,80	Boldizsár (1956)
liasice	2,56	Boldizsár (1964)
Nisip	2,10	Garg et al. (1975)
umed	1,13	Juhász (1976)
Nisip, argilă şi marnă panoniene	1,83	Boldizsár (1966)
Nisip şi gresie miocene şi panoniene	2,28	Greutter (1977)
Sol	0,58–1,28	Davidescu (1965)
Turbă uscată	0,07	Davidescu (1965)

persie hidrodinamică (De Josselin de Jong şi Bossen, 1961 ; Scheidegger, 1961 ; Bear, 1969), prin electroconducţie (Landau şi Lifchitz, 1969) etc. corespunzătoare respectiv legilor lui Darcy, Fick, Ohm etc. Aşadar, transmiterea căldurii în crusta terestră se realizează printr-un flux total a cărui densitate este definită prin legea

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\vec{\tilde{\mathfrak{w}}} = -\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}} \operatorname{grad} \tilde{\eta} \tag{3.22}$$

reprezentată, conform cu (3.6), (3.20) şi (3.21), sub forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\vec{\tilde{\mathfrak{w}}} = \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\vec{\tilde{w}} + \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\vec{\tilde{v}} =$$

$$= -\tilde{\varkappa}\left(\operatorname{grad} T + \frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} \operatorname{grad} \tilde{p} + \frac{1}{\tilde{c}_{\tilde{p}}} \sum_{j=2}^{n} \tilde{X}^{j} \operatorname{grad} \tilde{x}_{j}\right) \tag{3.23}$$

caracteristică pentru generalizarea şi unificarea formelor particulare ale legilor liniare de conducţie de tipul legilor lui Fourier, Darcy, Fick, Ohm etc. Prin urmare, derivatele substanţiale ale cantităţii

Tabelul 3.3

Valorile coeficientului de conductibilitate termică pentru apă în funcție de temperatură (după Davidescu, 1965)

Temperatura (°K)	Coeficientul de conductibilitate termică (W/m.°K)
273,15	0,551
283,15	0,575
293,15	0,599
303,15	0,618
313,15	0,634
323,15	0,648
333,15	0,659
343,15	0,668
353,15	0,675
363,15	0,680
373,15	0,683
393,15	0,686
413,15	0,685
433,15	0,683
453,15	0,675
473,15	0,663
493,15	0,645
513,15	0,628
533,15	0,605
553,15	0,575
573,15	0,540
593,15	0,494
613,15	0,437
633,15	0,356

de căldură și capacității calorice dintr-un volum variabil $V(t)$ în crusta terestră se pot exprima respectiv :

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{d}V=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)}\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{d}V-\oint_{\Omega(t)}\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}}\operatorname{grad}\ \tilde{\eta}\,\mathrm{d}\vec{\Omega}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)}\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{d}V-\oint_{\Omega(t)}\tilde{\varkappa}\left(\operatorname{grad}\ T+\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}}\operatorname{grad}\ \tilde{p}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\tilde{c}_{\tilde{p}}}\sum_{j=2}^{n}\tilde{X}^{j}\operatorname{grad}\tilde{x}_{j}\right)\mathrm{d}\vec{\Omega}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)}\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\,\mathrm{d}V+\oint_{\Omega(t)}(-\tilde{\varkappa}\operatorname{grad}T+\rho c_{p}Tm_{e}\vec{u})\,\mathrm{d}\vec{\Omega}\quad(3.24)$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V -$$

$$-\oint\limits_{\Omega(t)} \frac{\tilde{\rho}\tilde{\chi}}{T}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{grad}\,\tilde{p} + \sum_{j=2}^{n} \tilde{X}^{j}\,\mathrm{grad}\,\tilde{x}_{j}\right)\mathrm{d}\vec{\Omega} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V + \oint\limits_{\Omega(t)} \rho c_p m_e \vec{u}\;\mathrm{d}\vec{\Omega} \tag{3.25}$$

sau

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\;\mathrm{d}V = \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(-\,\tilde{\varkappa}\;\mathrm{grad}\;T + \rho c_p T m_e \vec{u})\right]\mathrm{d}V \tag{3.26}$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\;\mathrm{d}V = \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho c_p m_e \vec{u})\right]\mathrm{d}V. \tag{3.27}$$

3.3. Ecuaţia generală de difuzivitate termică

Transmiterea căldurii în crusta terestră este un proces ireversibil pentru orice interval finit de timp (De Groot şi Mazur, 1962; Fitts, 1962; Lykov, 1966), dar se prezintă ca un proces reversibil pentru fiecare interval infinit mic de timp (Hutten, 1967; Kikoïne şi Kikoïne, 1979), astfel încît, potrivit principiului al doilea al termodinamicii, derivata substanţială a cantităţii de căldură dintr-un volum oarecare $V(t)$ se menţine egală cu fluxul de densitate medie $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}\,(t, P, T)$ datorit surselor interioare de căldură din $V(t)$, iar derivata substanţială a capacităţii calorice din acelaşi volum $V\,(t)$ se anulează, adică

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\;\mathrm{d}V = \int\limits_{V(t)} \tilde{\mu}\;\mathrm{d}V \tag{3.28}$$

şi respectiv

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V = 0. \tag{3.29}$$

Substituind aceste derivate substanţiale prin ultimele expresii din (3.24) şi (3.25) sau prin expresiile lor (3.26) şi (3.27), ecuaţiile (3.28) şi (3.29) corespunzătoare bilanţului fluxurilor de căldură şi conservării capacităţii calorice într-un interval infinitesimal de timp devin :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T\,\mathrm{d}V + \oint_{\Omega(t)} (-\,\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\,\mathrm{d}\vec{\Omega} = \int_{V(t)} \tilde{\mu}\,\mathrm{d}V \tag{3.30}$$

şi

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V + \oint_{\Omega(t)} \rho c_p m_e \vec{u}\,\mathrm{d}\vec{\Omega} = 0 \tag{3.31}$$

sau

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T)}{\partial t} + \mathrm{div}\ (-\,\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u}) - \tilde{\mu}\right] \mathrm{d}V = 0 \tag{3.32}$$

şi

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho c_p m_e \vec{u})\right] \mathrm{d}V = 0. \tag{3.33}$$

Întrucît volumul $V(t)$ este arbitrar, ecuaţiile (3.32) şi (3.33) se prezintă respectiv sub formele locale

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho c_p T m_e \vec{u}) + \mathrm{div}\,(-\,\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T) = \tilde{\mu} \tag{3.34}$$

şi

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho c_p m_e \vec{u}) = 0. \tag{3.35}$$

Prin intermediul dezvoltării

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T)}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho c_p T m_e \vec{u}) = \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t} + $$

$$+ \rho c_p m_e \vec{u}\ \mathrm{grad}\ T + T\left[\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho c_p m_e \vec{u})\right]$$

în care ultimul termen al membrului drept se anulează potrivit ecuației de continuitate (3.35), din ecuația (3.34) se deduce *ecuația generală de difuzivitate termică* (Kappelmeyer, 1979; Albu și Pricăjan, 1980; Albu și Enăchescu, 1981)

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p m_e \vec{u}\ \mathrm{grad}\ T + \mathrm{div}\,(-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T) = \tilde{\mu}. \qquad (3.36)$$

În cazul propagării căldurii numai prin conducție (Fourier, 1822), adică al termoconducției, care se caracterizează prin anularea vitezei aparente $m_e\vec{u}$, ecuația de difuzivitate termică (3.36) se reduce la *ecuația lui Fourier*

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}(-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T) = \tilde{\mu} \qquad (3.37)$$

particularizate, pentru $\varkappa = const.$, sub forma (Carslaw și Jaeger, 1959; Davidescu, 1965; Landau și Lifchitz, 1971)

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \tilde{\chi}\ \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ T = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}}, \qquad (3.38)$$

unde $\tilde{\chi} = \tilde{\varkappa}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}$ reprezintă, potrivit cu (3.19), coeficientul mediu de difuzivitate termică, iar $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} = \tilde{\mu}\, \mathrm{d}V/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\, \mathrm{d}V$ este *productivitatea de căldură pe unitatea de capacitate calorică.*

* * *

Dacă domeniul de integrare $V(t)$ ar fi izolat ca un sistem termodinamic închis și deci masa

$$\int_{V(t)} \tilde{\rho}\, \mathrm{d}V$$

s-ar conserva conform ecuației

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \tilde{\rho}\, \mathrm{d}V = \int_{V(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}}{\mathrm{d}t} + \tilde{\rho}\ \mathrm{div}\ \vec{\tilde{w}}\right) \mathrm{d}V = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\tilde{\rho}\vec{\tilde{w}})\right] \mathrm{d}V = 0$$

sau

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\tilde{\rho}\vec{\tilde{w}}) = 0,$$

atunci ecuația (3.34) preluată sub forma

$$\tilde{\rho}\left[\frac{\partial(\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\partial t}+\vec{\tilde{w}}\,\mathrm{grad}\,(\tilde{c}_{\tilde{p}}T)\right]+\tilde{c}_{\tilde{p}}T\left[\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\tilde{\rho}\vec{\tilde{w}})\right]=\tilde{\mu}$$

s-ar reduce la egalitatea

$$\tilde{\rho}\left[\frac{\partial(\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\partial t}+\vec{\tilde{w}}\,\mathrm{grad}\,(\tilde{c}_{\tilde{p}}T)\right]=\tilde{\mu}$$

sau

$$\tilde{\rho}\,\frac{\delta(\tilde{c}_{\tilde{p}}T)}{\mathrm{d}t}=\tilde{\mu}$$

corespunzătoare relației (2.65) particularizate pentru procesul reversibil desfășurat într-un interval infinitesimal de timp.

3.4. Fluxul de căldură prin suprafața exterioară a crustei terestre

În ecuația (3.30), integrala

$$\oint_{\Omega(t)}(-\,\tilde{\varkappa}\,\mathrm{grad}\,T+\rho c_p T m_e \vec{u})\,\mathrm{d}\vec{\Omega}$$

exprimă fluxul total de căldură prin suprafața închisă $\Omega(t)$ care mărginește un volum oarecare $V(t)$ din crusta terestră. Extinzînd volumul $V(t)$ la întreaga crustă terestră, suprafața $\Omega(t)$ se constituie din cele două suprafețe închise care mărginesc crusta terestră fără să se intersecteze: cea interioară Ω_{int} reprezentată prin suprafața de discontinuitate Mohorovičić și cea exterioară Ω_{ext} reprezentată prin suprafața topografică a uscatului și fundului oceanelor și mărilor. Întrucît sensul normalei la orice element $\mathrm{d}\vec{\Omega}=\vec{n}\mathrm{d}\Omega$ al suprafeței $\Omega=\Omega_{int}\cup\Omega_{ext}$ este considerat spre exteriorul volumului V_{crust} mărginit între Ω_{int} și Ω_{ext}, urmează că, față de un sens convențional dinspre interiorul spre exteriorul Pămîntului, elementele $\mathrm{d}\vec{\Omega}_{int}$ și $\mathrm{d}\vec{\Omega}_{ext}$ ale celor două suprafețe Ω_{int} și Ω_{ext} au respectiv expresiile $\mathrm{d}\vec{\Omega}_{int}=$

$= -\vec{n}d\Omega = -d\vec{\Omega}$ și $d\vec{\Omega}_{ext} = \vec{n}\, d\Omega = d\vec{\Omega}$, astfel încît fluxul de căldură prin suprafața Ω se prezintă sub forma

$$\oint_{\Omega} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega} =$$

$$= -\int_{\Omega_{int}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega} + \int_{\Omega_{ext}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega}, \tag{3.39}$$

iar ecuația (3.30) devine:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{crust}} \tilde{\rho}\tilde{c}_p T\, dV = \int_{\Omega_{int}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega} +$$

$$+ \int_{V_{crust}} \tilde{\mu}\, dV - \int_{\Omega_{ext}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega}. \tag{3.40}$$

Potrivit ecuației (3.40), *variația în raport cu timpul (derivata locală) a cantității de căldură din crusta terestră*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{crust}} \tilde{\rho}\tilde{c}_p T\, dV$$

se realizează prin diferența dintre *afluxul de căldură rezultat din însumarea fluxului prin suprafața interioară a crustei* (Birch et al., 1968; Lachenbruch 1971)

$$\int_{\Omega_{int}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega}$$

cu fluxul datorit surselor de căldură din interiorul crustei

$$\int_{V_{crust}} \tilde{\mu}\, dV$$

și defluxul de căldură reprezentat de fluxul prin suprafața exterioară a crustei

$$-\int_{\Omega_{ext}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T + \rho c_p T m_e \vec{u})\, d\vec{\Omega}$$

În compunerea fluxului de căldură prin suprafaţa exterioară a crustei terestre intervin deci fluxurile

$$-\int_{\Omega_{ext}} (-\tilde{\varkappa} \text{ grad } T) \, d\vec{\Omega}$$

şi

$$-\int_{\Omega_{ext}} \rho c_p T m_e \vec{u} \, d\vec{\Omega}$$

corespunzătoare pierderilor de căldură prin conducţie şi respectiv prin transport de masă. Ţinînd seamă de extinderea, frecvenţa şi intensitatea ieşirilor de produse vulcanice, postvulcanice şi de alte produse la suprafaţa exterioară a crustei terestre, se conchide că pierderea de căldură prin transport de masă nu poate fi decît mult inferioară pierderii de căldură prin conducţie (probabil numai 1 % din pierderea totală de căldură, după Lăzărescu, 1980). Defluxul de căldură prin suprafaţa exterioară a crustei terestre este diminuat într-o oarecare măsură prin afluxul de căldură primită prin radiaţie de la soare.

Densitatea fluxului de termoconducţie prin suprafaţa exterioară a crustei terestre este local, regional şi global determinată cu valorile prezentate în tabelul 3.4, iar repartiţia sa este conformă reprezentărilor armonice sferice din figurile 3.1 pentru Europa şi 3.2 pentru întregul glob terestru.

3.5. Aplicaţii

3.5.1. Să se determine modulul (intensitatea) vitezei medii de termoconducţie la temperatura de 300°K şi la gradientul de temperatură de — 0,033 °K/m printr-o rocă cu coeficientul de difuzivitate termică de 2,500 · 10⁻⁶ m²/s.

Rezolvare. Utilizînd relaţia (3.4) preluată sub forma

$$\tilde{w} = \tilde{s}_0 \vec{\tilde{w}} = -\frac{\tilde{\chi}}{T} \frac{\partial T}{\partial s}$$

în care $T = 300°\text{K}$, $\partial T/\partial s = -0{,}033°\text{K/m}$ şi $\tilde{\chi} = 2{,}500 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$ rezultă că

$$\tilde{w} = -\frac{2{,}500 \cdot 10^{-6}}{300} \cdot (-0{,}033) = 2{,}75 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 2{,}376 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{zi}} = 8{,}67834 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{an}}.$$

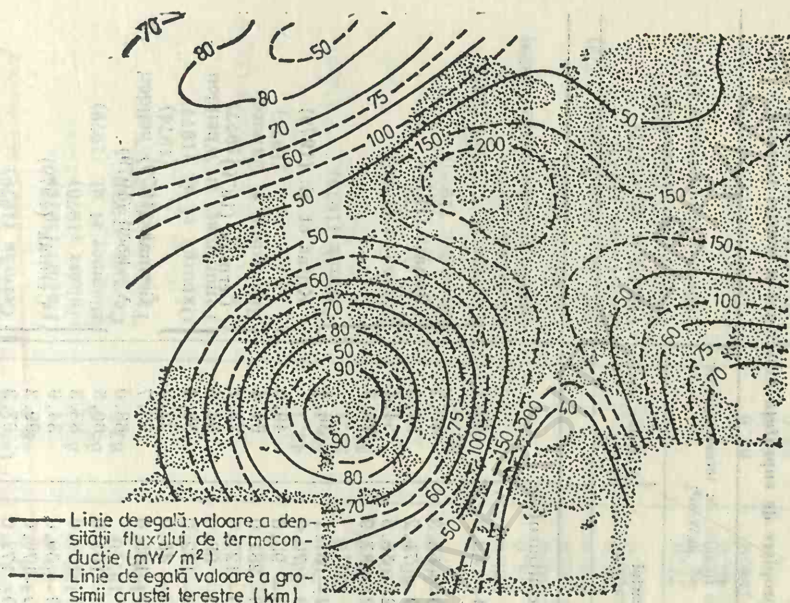


Fig. 3.1. Reprezentarea armonică sferică de gradul 18 a repartiției fluxului de termoconducție pentru Europa (după Chapman et al., 1979)

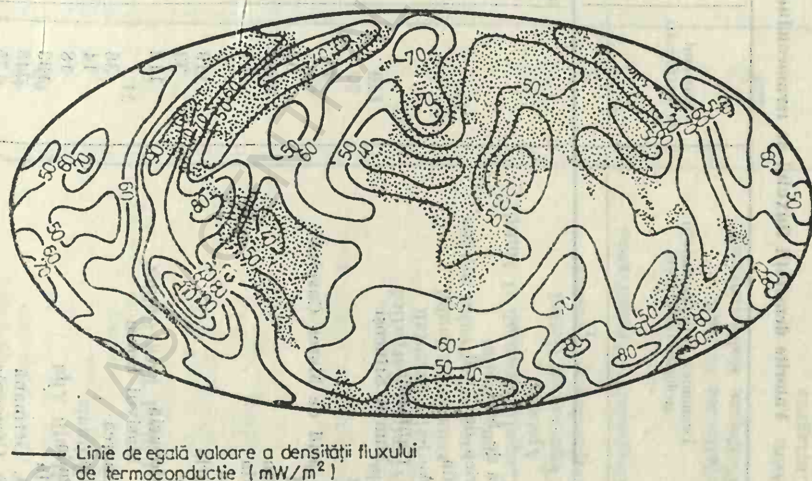


Fig. 3.2. Reprezentarea armonică sferică de gradul 12 a repartiției fluxului de termoconducție pentru întregul glob terestru (după Chapman și Pollack, 1975)

Tabelul 3.4.

Valorile densității fluxului de termoconducție în apropiere de suprafața exterioară a crustei terestre

Denumirea țării sau unității geologice (geografice)	Numărul de determinări	Densitatea fluxului de termoconducție (mW/m²)		Sursa de informație
		Ecartul de variație	Valoarea medie	
1	2	3	4	5
		Domenii continentale		
Africa de Sud		31,4– 63,6	46,1	Juhász (1976)
America de Nord				
Canada		28,9– 55,3	40,2	
S.U.A.		38,9– 71,2	54,8	
California		50,2– 58,6	54,4	
Munții Stîncoși		71,2– 87,9	79,5	
Asia				
Iran		22,2– 51,1	36,4	
sud de Marea Caspică		40,0– 70,0		Kutas et al. (1979)
Israel	63	7,0– 93,0	49,0	Čermák (1979)
Europa	2590	5,0–281,0	64,4	
Austria	51	43,0–127,0	72,1	
Belgia	5	50,0– 88,0	64,5	
Bulgaria	119	8,0–132,0	58,4	
Cipru	33	5,0– 46,0	22,3	
Cehoslovacia	112	41,0–185,0	73,7	Čermák (1979)
Masivul Boem			68,0	Vyskočil (1979)
Danemarca	36	43,0–101,0	60,5	Cermák (1979)
Elveția	14	45,0–109,0	83,3	
Finlanda	18	22,0– 50,0	34,9	
Franța	133	45,0–176,0	99,3	
R. D. Germană	348	26,0–172,0	67,3	
R. F. Germania	175	21,0–168,0	82,9	
Cîmpia nord-germană	16		59,0	Čermák și Lubimova (1976)

Grecia	27	30,0–105,0	53,0	Čermák (1979)
Irlanda	7	52,0–81,0	64,6	Čermák (1979)
Islanda	48	63,0–281,0	146,2	Čermák (1979)
Italia	62	17,0–143,0	68,8	Čermák (1979)
Munții Alpi		70,0–80,0		Haenel (1974)
Marea Britanie		28,5–120,2	56,5	Juhász (1976)
			58,5	Bloomer et al. (1979)
	71	17,0–137,0	67,7	Čermák (1979)
Anglia și Țara Galilor		16,7–144,9		Tammemagi și Wheildon (1974)
				Oxburgh et al. (1977)
				Tammemagi și Wheildon (1977)
				Richardson și Oxburgh (1978)
Norvegia	84	21,0–63,0	42,1	Čermák (1979)
Olanda	6	45,0–70,0	55,1	Čermák (1979)
Polonia	55	21,0–91,0	50,1	Čermák (1979)
România	179	19,0–118,0	54,7	Čermák (1979)
Avanfosa Carpatică		30,0–40,0		Lăzărescu (1980)
Carpații Orientali		60,0–80,0		Čermák (1979)
zona cristalinului		40,0–50,0		Lăzărescu (1980)
zona eruptivului neogen			80,0	Lăzărescu (1980)
zona flișului		83,0–110,0		Visarion și Veliciu (1981)
Carpații Orientali și Munții Apuseni		50,0–60,0		Lăzărescu (1980)
		66,0–118,0		Veliciu și Demetrescu (1979)
Depresiunea Getică		50,0–60,0		Lăzărescu (1980)
Depresiunea Panonică		80,0–90,0		Lăzărescu (1980)
		85,0–100,0		Veliciu și Demetrescu (1979)
Depresiunea Transilvaniei		33,0–58,0		Demetrescu (1973)
		45,0–50,0		Veliciu et al. (1977)
				Visarion și Veliciu (1981)
		33,0–74,0		Veliciu și Demetrescu (1979)
Platforma Moesică		43,0–78,0		Veliciu și Demetrescu (1979)
Platforma Moldovenească		30,0–40,0		Čermák (1979)
Spania	133	29,0–189,0	81,6	Čermák (1979)
Adra			85,0	Albert-Beltrán (1979)
Cartagena			95,0	Albert-Beltrán (1979)
Meseta			82,0	Albert-Beltrán (1979)

(continuare tabel 3.4)

1	2	3	4	5
Suedia	23	29,0–101,0	56,8	Čermák (1979)
Ungaria	27	52,0–139,0	95,3	
	14	52,0–113,0		Horváth et al. (1979)
U.R.S.S. (partea europeană)	761	19,0–142,0	52,3	Čermák (1979)
Cîmpia Rusă de nord			47,0	Vyskočil (1979)
Munţii Caucaz			53,0	
Munţii Ural	26		61,5	Čermák şi Lubimova (1976)
nord şi nord-vest de Marea Caspică			50,0	Vyskočil (1979)
Placa Scitică	127		69,9	Čermák şi Lubimova (1976)
Platforma Rusă	182		45,6	
		30,0–50,0		Ádám (1978)
				Kutas et al. (979)
			46,0	Vyskočil (1979)
de nord			41,0	
Scutul Baltic	22		34,8	Čermák şi Lubimova (1976))
Scutul Ucrainean	61		36,4	
		23,0–54,0		Kutas (1979)
		38,0–73,0		Chapman şi Pollack (1975)
Reuniunea tuturor continentelor	1699		62,3	Haenel (1979)
			63,0	Kappelmeyer (1979)
	Domenii marine şi oceanice			
Marea Caspică	21		64,5	Čermák şi Lubimova (1976)
	20	40,0–99,0	60,9	Čermák (1979)
Marea Mediterană	129	10,0–173,0	69,7	
	92		61,5	Haenel (1979)
de est	51		36,9	Haenel (1979)
de est şi Marea Ionică	37	10,0–74,0	32,6	Čermák (1979)
Marea Adriatică	11	36,0–104,0	55,3	
Marea Egee	23	47,0–114,0	69,1	
	14		72,4	Haenel (1979)
de vest	25		95,6	
Marea Tireniană	13	30,0–173,0	113,2	Čermák (1979)
sud-est de Spania	32	55,0–155,0	98,7	
vest de Sardinia	13	33,0–132,0	73,3	

Marea Neagră		30,0—40,0		Erickson (1970)
	56		40,6	Čermák şi Lubimova (1976)
	86	8,0—91,0	36,0	Čermák (1979)
	76	11,7—208,1	39,6	Haenel (1979)
		25,0—45,0		Kutas et al. (1979)
Oceanul Atlantic		24,3—59,5	41,0	Juhász (1976)
		0,0—342,5		Haenel (1979)
de nord	251	0,0—343,0	86,1	Čermák (1979)
de nord-est	124		82,8	Haenel (1979)
dorsala mediană	64		100,0	Haenel (1979)
est şi vest de dorsala mediană	54		52,2	Haenel (1979)
Marea Groenlandei — Marea Norvegiei	76	14,0—268,0	98,4	Čermák (1979)
	64	9,2—268,4	96,4	Haenel (1979)
Marea Nordului	42	42,0—91,0	68,6	Čermák (1979)
Oceanul Pacific		16,7—138,2	60,7	Herzen şi Uyeda (1963)
				Juhász (1976)
Reuniunea tuturor oceanelor	3718		79,8	Haenel (1979)
Reuniunea tuturor continentelor şi oceanelor			59,0	Chapman et al. (1979)
	5417		77,0	Chapman et al. (1979)
			74,3	Haenel (1979)

3.5.2. Să se calculeze coeficientul de conductibilitate termică a unei argile cu masa specifică de 2,10 t/m^3, căldura specifică de 0,77 kJ/ /kg.°K și coeficientul de difuzivitate termică de $1{,}484 \cdot 10^{-6}$ m^2/s.

Rezolvare. Prin aplicarea formulei (3.19) cu $\tilde{\rho} = 2{,}10 \cdot 10^3$kg/m^3, $\tilde{c}_{\tilde{p}} = 0{,}77 \cdot 10^3$ J/kg.°K și $\tilde{\chi} = 1{,}484 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, se găsește că

$$\tilde{\varkappa} = 2{,}10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}77 \cdot 10^3 \cdot 1{,}484 \cdot 10^{-6} = 2{,}39963 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m} \cdot {}^\circ\mathrm{K}}.$$

3.5.3. Să se evalueze fluxul de termoconducție prin suprafața cvasi-orizontală cu aria de $200 \cdot 10^6$ m^2 a unui bazin sedimentar în care, pe intervalul de adîncime dintre 0 m și 1500 m, temperatura crește uniform de la 280°K la 340°K, iar coeficientul mediu de conductibilitate termică verticală a rocilor este de 2 W/m. °K.

Rezolvare. Potrivit legii lui Fourier (3.20), densitatea fluxului de termoconducție verticală are expresia

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\,T\vec{k}\,\vec{\tilde{w}} = -\vec{k}(\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T)$$

în care $\vec{k}$ este versorul verticalei ascendente, iar

$$\vec{k}\vec{\tilde{w}} = \tilde{w}_z$$

$$-\vec{k}(\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T) = -\tilde{\varkappa}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

reprezintă componentele verticale ale vitezei medii de termoconducție și respectiv densității fluxului de termoconducție. Prin urmare, fluxul de termoconducție verticală printr-o suprafață orizontală Ω se calculează cu formula

$$-\int_\Omega \tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\,T\tilde{w}_z\,\mathrm{d}\Omega = -\iint_\Omega \left(-\tilde{\varkappa}_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\left(-\tilde{\varkappa}_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{med} \cdot \Omega.$$

Aplicînd această formulă de calcul, se obține :

$$-\int_\Omega \tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\,T w_z\,\mathrm{d}\Omega = -\left(-2 \cdot \frac{280 - 340}{1500}\right) \cdot 200 \cdot 10^6 = -16 \cdot 10^6\ \mathrm{W}.$$

3.5.4. Să se estimeze fluxul de termoconducție prin suprafața exterioară a întregii cruste terestre, admițînd că această suprafață (suprafața topografică a uscatului și fundului oceanelor și mărilor) are aria de cca $525 \cdot 10^{12}$ m², adică mai mare cu cca 2,92 % față de aria suprafeței globului terestru.

Rezolvare. Fluxul de termoconducție prin suprafața exterioară Ω_{ext} a întregii cruste terestre este definit prin expresia

$$-\int_{\Omega_{ext}} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T \vec{\tilde{w}}\, d\vec{\Omega} = -\int_{\Omega_{ext}} (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T)\, d\vec{\Omega}$$

în care $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T \vec{\tilde{w}}\, d\vec{\Omega} = (-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T)\, d\vec{\Omega}$ reprezintă fluxul elementar de termoconducție corespunzător suprafeței elementare $d\vec{\Omega} = \vec{n} d\Omega$. Dacă se presupune că, oriunde pe suprafața crustei terestre, vectorul $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T \vec{\tilde{w}} = -\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T$ este dirijat după normala n la suprafața elementară $d\vec{\Omega}$, atunci fluxul elementar de termoconducție se poate prezenta sub forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T \vec{\tilde{w}}\, d\vec{\Omega} \approx -\tilde{\varkappa}_n \frac{\partial T}{\partial n} d\Omega,$$

iar fluxul de termoconducție prin Ω_{ext} devine :

$$-\int_{\Omega_{ext}} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T \vec{\tilde{w}}\, d\vec{\Omega} \approx -\int_{\Omega_{ext}} -\tilde{\varkappa}_n \frac{\partial T}{\partial n} d\Omega = -\left(-\tilde{\varkappa}_n \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{med} \cdot \Omega_{ext}.$$

Preluînd din tabelul 3.4 extremele intervalului în care poate fi găsită valoarea medie a densității fluxului de termoconducție pentru reuniunea tuturor continentelor și oceanelor și utilizînd valoarea dată pentru aria suprafeței exterioare a crustei terestre, rezultă că

$$-\int_{\Omega_{ext}} \tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} T \vec{\tilde{w}}\, d\vec{\Omega} \approx -(59{,}0\ldots74{,}0) \cdot 525 \cdot 10^{12} =$$

$$= -(30975\ldots38850) \cdot 10^{12}\ \mathrm{mW} = -(3{,}0975\ldots3{,}8850) \cdot 10^{13}\ \mathrm{W}.$$

ÁDÁM, A. (1978). *Geothermal effects in the formation of electrically conducting zones and temperature distribution in the earth*, Phys. Earth Planet. Int. **17**, p. 21–28.

ALBERT-BELTRÁN, J. F. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow and Temperature Gradient Data from Spain*, p. 261–266, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

ALBU, M. (1981). *Mecanica apelor subterane*, Cap. 2, p. 47–53, Editura tehnică, București.

ALBU, M., ENĂCHESCU, D. (1981). *Despre simularea evoluției sistemelor hidrotermominerale subterane*, St. cerc. geol., geofiz., geogr., Geofizică, Tom. **19**, p. 143–155, București.

ALBU, M., PRICĂJAN, A. (1980). *Détermination des paramètres d'un systeme fissurel hydrothermominéral et prévision de son évolution au cours de l'exploitation*, IV Congresso Internazionale sulle Acque Sotterranee, 17–21 Febbraio 1980, Acireale, V Tema, Problemei inerenti il calcolo e la modellistica di acquiferi fessurati, Catania.

BEAR, J. (1969). In : Flow through porous media (ed. R. J. M. De Wiest), *Hydrodynamic Dispersion*, p. 109–199, Academic Press, New York–London.

BERNARD, J., EVANO, J. F. (1975). *Définition d'un Modèle Applicable à la Géothermie Off-Shore par Fracturation Nucléaire*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1547–1553.

BIRCH, F., ROY, R. F., DECKER, E. R. (1968). In : Studies of Appalachian geology : Northern and Maritime (ed. E. Zen), *Heat flow and thermal history in New England and New York*, p. 437–451, Interscience, New York.

BLOOMER, J. R., RICHARDSON, S. W., OXBURG, E. R. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow in Britain : an Assessment of the Values and Their Reliability*, p. 293–300, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

BOLDIZSÁR, T. (1956). *Terrestrial heat flow in Hungary*, Geofis. Pura Appl. **34**, p. 66–70.

BOLDIZSÁR, T. (1959). *Terrestrial heat flow in the Nagylengyel oilfield*, Publ. Min. Fac. Sopron **20**, p. 27–34.

BOLDIZSÁR, T. (1964). *Geothermal measurements in the twin shaft of Hosszúhetény*, Acta Tech. Acad. Sci. Hung. **47** (3–4), p. 293–308.

BOLDIZSÁR, T. (1965). *Heat flow in Oligocene sediments at Szentendre*, Pure Appl. Geophys. **61**, p. 127–138.

BOLDIZSÁR, T. (1966). *Heat flow in the natural gas field of Hajduszoboszló*, Pure Appl. Geophys. **64**, p. 121–125.

BOLDIZSÁR, T. (1967). *Terrestrial heat flow in Hungarian Permian strata at Bakonya*, Pure Appl. Geophys. **67**, p. 128–132.

BOLI, B., UEINER, D.J. (1964). *Teoriia temperaturnih napriajenii*, M., Mir.

CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*, ed. II, Oxford, Univ. Press New York.

CATTANEO, G. (1948–1949). *Sulla conduzione del callore*, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **3**, 83.

CATTANEO, G. (1958). *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*, C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, **247**, 431.

ČERMÁK, V. (1976). In : Geoelectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Ádàm), *Paleoclimatic effect on the underground temperature and some problems of correcting heat flow*, p. 59–66 ; *Heat flow investigation in Czechoslovakia*, p. 414–427, Akadémiai Kiadó, Budapest.

ČERMÁK, V. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow Map of Europe*, p. 3—40, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg—New York.
ČERMÁK, V., LUBIMOVA, E. A. (1976). In : Geolectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Ádàm), *Heat flow map of Central and Eastern Europe* (1 : 10 000 000), p. 376—380, Akadémiai Kiadó, Budapest.
CHAPMAN, D. S., POLLACK, H. N. (1975). *Global heat flow : a new look*, Earth Planet. Sci. Lett. **28**, p. 23—32.
CHAPMAN, D. S., POLLACK, H. N., ČERMÁK, V. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Global Heat Flow with Special Reference to the Region of Europe*, p. 41—48, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.
CLARK, S. P. (1966). *Handb. Phys. Const.*, revised edition, Geological Society of America Memoir **97**.
DAVIDESCU, AL. (1965). In : Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. VII, *Căldura*, 8, p. 1278—1285, Editura tehnică, București.
DE GROOT, S. R., MAZUR, P. (1962). *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North Holland Publ. Co., Amsterdam.
DE JOSSELIN DE JONG, G., BOSSEN, M. J. (1961). *Discussion of papaer by J. Bear, On the tensor form of dispersion*, Journal of Geophysical Research, **66**, p. 3623—3624.
DEMETRESCU, C. (1973), *Valori preliminare ale fluxului termic în Transilvania*, St. Cerc. Geol. Geofiz. Geogr., Ser. Geofiz. **11**, p. 13—21.
DE WIEST, R. J. M. (1969). In : Flow through porous media (ed. R. J. M. De Wiest), *Fundamental Principles of Ground-Water Flow*, p. 1—52, Academic Press, New York—London.
ERICKSON, A. J. (1970). *The measurement and interpretation of heat flow in the Mediterranean and Black Seas*, Thesis Mass. Inst. Technol. Woods Hole Ocean, Inst., p. 272.
FITTS, D. D. (1962). *Non-Equilibrium Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York.
FOURIER, J. B. J. (1822). *La Théorie analytique de la Chaleur*, Paris.
GABLE, R. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach) *Draft of Geothermal Flux Map of France*, p. 179—185, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.
GARG, S. K., PRITCHETT, J. W., BROWNELL, D. H. JR. (1975). *Transport of Mass and Energy in Porous Media*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20—29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1651—1656.
GREUTTER, A. (1977). *Terrestrial heat flow in Edelény*, Magy. Geofiz. **18** (2), p. 15—25.
GURTIN, M. E., PIPKIN, A. C. (1968). *A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds*, Arch. Rat. Mech. Anal., **31**, 113.
HAENEL, R. (1974). *Heat flow measurements in Northern Italy and heat flow maps of Europe*, Z. Geophys. **40**, p. 367—380.
HAENEL, R. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *A Critical Review of Heat Flow Measurements in Sea and Lake Bottom Sediments*, p. 49—73, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.
HERZEN, R. P. VON, UYEDA, S. (1963). *Heat Flow through the Eastern Pacific Floor*, J. Geophys. Res. **68**, p. 4234—4240.
HORVATH, F., ERKI, I., BODRI, L., MARKÓ, L., GELLÉRT, T. (1977). *Heat flow measurement in Hungary*, Unpublished report to the Central Geological Office (in Hungarian).

HORVÁTH, F., BODRI, L., OTTLIK, P. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Geothermics of Hungary and the Tectonophysics of the Pannonian Basin «Red Spot»*, p. 206—217, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

HUBBERT, M. K. (1940). *The theory of ground-water motion*, J. Geol. 48, p. 785—944.

HURTIG, E., SCHLOSSER, P. (1976). In : Geoelectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia) KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Ádám), *Geothermal studies in the GDR and relations to the geological structure*, p. 386—394; *Vertical changes of the heat flow in boreholes in the North-German Sedimentary Basin*, p. 395—401, Akadémiai Kiadó, Budapest.

HUTTEN, E. H. (1967). *The Ideas of Physics*, Chap. 5, Contemporary Science Paperback, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh.

JACOB, C. E. (1950). In : Engineering Hydraulics (ed. H. Rouse), *Flow of ground water*, p. 321—386, John Wiley and Sons, New York.

JONES, F. W., OXBURGH, E. R. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Cermák and L. Rybach), *Two-Dimensional Thermal Conductivity Anomalies and Vertical Heat Flow Variations*, p. 98—106, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

JUHÁSZ, J. (1976). *Hidrogeológia*, Elsö rész. Általános teleptan, p. 149—159, Akadémiai Kiadó, Budapest.

KALISKI, S. (1965). *Wave equation of heat conduction*, Bul. Acad. Pol. Soci., 4, 211.

KAPPELMEYER, O. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Cermák and L. Rybach), *Implications of Heat Flow Studies for Geothermal Energy Prospects*, p. 126—135, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

KIKOÏNE, A., KIKOÏNE, I. (1979). *Physique moléculaire* (traduit du russe), Chap. III, p. 173—185, Chap. VI, p. 279—297, Éditions Mir, Moscou.

KUTAS, R. I. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Cermák and L. Rybach), *A Geothermal Model of the Earth's Crust on the Territory of the Ukrainian Shield*, p. 309—315, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg— New York

KUTAS, R. I., LUBIMOVA, E. A., SMIRNOV, IA. B. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow Studies in the European Part of the Soviet Union*, p. 301—308, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

LACHENBRUCH, A. H. (1971). *Vertical gradients of heat productions in the continental crust, Theoretical detectability from near-surface measurements*, J. Geophys. Res., 76, p. 3841—3851.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1969). *Électrodynamique des milieux continus* (traduit du russe), Physique théorique, tome VIII, Chap. III, p. 127—152, Éditions Mir, Moscou.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1971). *Mécanique des fluides* (traduit du russe), Physique théorique, tome VI, Chap. V, *Thermoconduction dans un fluide*, p. 229—239, Editions Mir, Moscou.

LĂZĂRESCU, V. (1980). *Geologie fizică*, p. 176—181, Editura tehnică, București.

LYKOV, A. V. (1966). *Application of irreversible thermodynamics to investigation of heat and mass transfer*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 9, 139.

MAIZELI, V. M. (1951). *Temperaturnie zadaci teorii uprugosti*, Izd-vo AN USSR, Kiev.

MEIXNER, J. (1970). *On the linear theory of heat conduction*, Arch. Rat. Mech. Anal., 2, 108.

MORSE, P., FESHBACH, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, vol. I, McGraw-Hill, New York.

OXBURGH, E. R., RICHARDSON, S. W., BLOOMER, J. R., MARTIN, A., WRIGHT, S. (1977). *Sub-surface temperatures from heat flow studies in the United Kingdom*, Semin. Geotherm. Energy (Commission of the European Communities) 1, p. 155—173.

PLEWA, S. (1976). In : Geoelectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Ádám), *Correlation between thermal conductivity and other physical parameters of rocks*, p. 48—52, Akadémiai Kiadó, Budapest.

POLUBARINOVA-KOCINA, P. IA. (1962). *Theory of Groundwater Mouvement, Princeton University Press*, Princeton.

PRUSOV, I. A. (1978). *Termouprughie anizotropnie plastinki*, Glava 2, p. 20—23, Izdatelistvo BGU im. V. I. Lenina, Minsk.

RICHARDSON, S. W., OXBURGH, E. R. (1978). *Heat flow, radiogenic heat production and crustal temperatures in England and Wales*, J. Geol. Soc. Lond. **135**, p. 323—337.

SALÁT, P. (1967). *The measurement of terrestrial heat flow in the Mecsek* Mts. Ph. D. Thesis, Budapest (in Hungarian).

SALÁT, P. (1968). *The measurement of terrestrial heat flow at Budapest and Recsk*, Unpublished paper.

SCHEIDEGGER, A. E. (1961). *General theory of dispersion in porous media*, Journal of Geophysical Research, **66**, p. 3273—3278.

TAITEL, Y. (1972). *On the parabolic, hyperbolic and discrete formulation of the heat conduction equation*, Int. J. Heat and Mass Transfer, **15**, 369.

TAMMEMAGI, H. Y., WHEILDON, J. (1974). *Terrestrial heat flow and heat generation in south-west England*, Geophys. J.R. Astr. Soc. **38**, p. 83—94.

TAMMEMAGI, H. Y., WHEILDON, J. (1977). *Further data on the south-west England heat flow anomaly*, Geophys. J.R. Astr. Soc. **49**, p. 531—539.

TYE, R. P. (1969). *Thermal Conductivity*, Academic Press, New York.

VELICIU, S., CRISTIAN, M., PARASCHIV, D., VISARION, M. (1977). *Preliminary data of heat flow distribution in Romania*, Geothermics, **6**, p. 95—98.

VELICIU, S., DEMETRESCU, C. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow in Romania and Some Relations to Geological and Geophysical Features*, p. 253—260, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

VERNOTTE, P. (1958). *La véritable équation de la chaleur*, C. R. Hebd. Séanc., Acad. Sci. Paris, **247**, 2103.

VISARION, M., VELICIU, S. (1981). *Unele considerații asupra fluxului termic scăzut din Bazinul Transilvaniei*, St. cerc. geol., geofiz., geogr. Geofizică, Tom. **19**, p. 53—60, București.

VYSKOČIL, P. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow, Crustal Thickness and Recent Vertical Movements*, p. 119 —125, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

«Conform procedeului lui Clausius, partizanii termodinamicii speciale nu au dezmințit niciodată marea valoare a termodinamicii generale. Astfel, succesele celei din urmă nu contravin absolut cu nimic celei dintîi.»

LUDWIG BOLTZMANN

4. Termoconducția rectilinie

4.1. Ecuațiile fundamentale

În coordonate carteziene (fig. 4.1), ecuația lui Fourier (3.37) se scrie sub forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\tilde{\mu} \tag{4.1}$$

în care coeficienții $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}$, $\tilde{\varkappa}$ și $\tilde{\mu}$ depind, în general, de timp, de coordonatele x, y, z și de temperatura T (Zeldovitch și Kompaneets, 1950 ; Carslaw, 1959).

În cazul străpungerii magmei de-a lungul unui plan vertical de contact cu rocile înconjurătoare (de exemplu, la formarea unui *dyke*), termoconducția este orientată, cel puțin provizoriu și local, perpendicular pe acest plan, dinspre magmă spre rocile înconjurătoare. Alegînd axa Ox după direcția și în sensul termoconducției și presupunînd că temperatura T nu depinde de coordonatele y și z, adică $\partial T/\partial y = \partial T/\partial z = 0$, ecuația (4.1) se aduce la forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\tilde{\mu}(t, x, T) \tag{4.2}$$

în care este evidențiată, potrivit legii lui Fourier (3.20), densitatea fluxului (fluxul unitar) de termoconducție laterală

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x}=\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\tilde{w}_x=\tilde{q}_x. \tag{4.3}$$

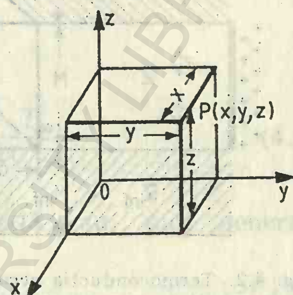


Fig. 4.1. Schema de principiu a sistemului de coordonate carteziene

În cazul pătrunderii magmei de-a lungul unui plan orizontal de contact cu rocile acoperitoare (de exemplu, la formarea unui *sill*) și în cazul mai general al propagării ascensionale a căldurii în crusta terestră, în care termoconducția se menține verticală și temperatura nu depinde de coordonatele x și y, deci $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = 0$, ecuația (4.1) se prezintă sub forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\tilde{\mu}(t, z, T), \tag{4.2'}$$

unde este evidențiată, potrivit cu (3.20), densitatea fluxului (fluxul unitar) de termoconducție verticală

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}=\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}T\tilde{w}_z=\tilde{q}_z. \tag{4.3'}$$

În cazul termoconducției rectilinii laterale neconservative într-un strat orizontal de conductibilitate termică ridicată $\tilde{\varkappa}$, grosime M și temperatură $T = T(t, x)$ cu $\lim\limits_{t\to 0} T(t, x) = \lim\limits_{x\to\infty} T(t, x) = T_\infty$ mărginit dedesubt printr-un strat de conductibilitate termică redusă $\tilde{\varkappa}_{inf}$, grosime M_{inf} și temperatură menținută egală cu T_∞ pe suprafața sa inferioară, iar deasupra printr-un alt strat de conductibili-

tate termică redusă $\tilde{\varkappa}_{sup}$, grosime M_{sup} şi temperatură menţinută egală cu T_∞ pe suprafaţa sa superioară (fig. 4.2), fluxul elementar de căldură $\tilde{\mu}\, dV$ corespunzător productivităţii medii a unei prisme

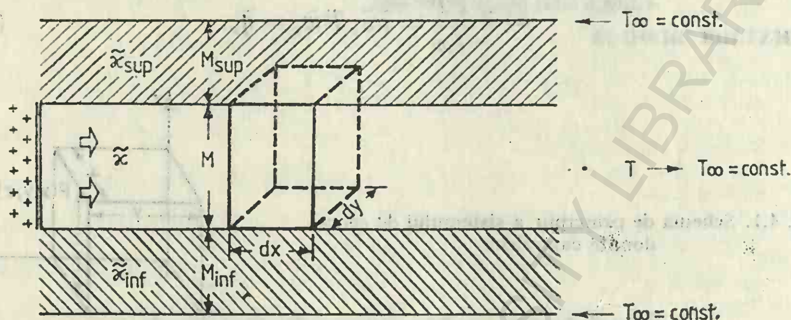


Fig. 4.2. Termoconducţia neconservativă rectilinie laterală într-un strat orizontal de conductibilitate termică ridicată mărginit dedesubt şi deasupra prin cîte un strat de conductibilitate termică redusă

drepte de volum $dV = M\, dx\, dy$ este reprezentat, potrivit legii lui Fourier, de fluxul vertical de căldură $[-\tilde{\varkappa}_{inf}(T-T_\infty)/M_{inf}]dxdy + [-\tilde{\varkappa}_{sup}(T-T_\infty)/M_{sup}]\, dxdy$ rezultat din însumarea fluxurilor elementare prin bazele de arie $dxdy$ ale prismei, adică

$$\tilde{\mu} M\, dxdy = \left(-\tilde{\varkappa}_{inf}\frac{T-T_\infty}{M_{inf}}\, dxdy\right) + \left(-\tilde{\varkappa}_{sup}\frac{T-T_\infty}{M_{sup}}\, dxdy\right)$$

sau

$$\tilde{\mu} = -\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}\right)\frac{T-T_\infty}{M}, \tag{4.4}$$

astfel încît ecuaţia (4.2) se scrie sub forma

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}\right)\frac{T-T_\infty}{M}. \tag{4.5}$$

Particularizînd pentru $\partial\tilde{\varkappa}/\partial x = 0$ şi introducînd notaţiile

$$\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} = \tilde{\chi}$$

şi

$$\frac{\tilde{\varkappa} M}{\dfrac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \dfrac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}} = \tilde{\mathbf{B}}^2$$

prin care se evidenţiază coeficientul de difuzivitate termică $\tilde{\chi}$ şi *factorul de neconservativitate*

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sqrt{\frac{\tilde{\varkappa} M}{\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}}}, \tag{4.6}$$

ecuaţia (4.5) se aduce la forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{T - T_\infty}{\tilde{\mathbf{B}}^2}. \tag{4.7}$$

Dacă temperatura T_∞ se menţine constantă sau, mai general, satisface ecuaţia omogenă

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial T_\infty}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial x^2} = 0$$

şi se notează diferenţa de temperatură $T - T_\infty$ prin θ, atunci ecuaţia (4.7) devine:

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\theta}{\tilde{\mathbf{B}}^2}. \tag{4.8}$$

Se convine ca termoconducţia caracterizată prin condiţia $\partial T/\partial t = 0$ sau $\partial \theta/\partial t = 0$ să fie denumită termoconducţie staţionară, iar cea caracterizată prin condiţia $\tilde{\mu} = 0$ sau $\tilde{\mathbf{B}}^{-2} = 0$ să fie denumită termoconducţie conservativă.

4.2. Termoconducţia staţionară conservativă

Dacă sînt îndeplinite simultan condiţiile $\partial T/\partial t = 0$ şi $\tilde{\mu} = 0$ sau este satisfăcută numai condiţia

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_{\tilde{p}} \frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{\mu}, \tag{4.9}$$

atunci ecuaţia (4.2) sau ((4.2′) se particularizează, pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial x)\,\mathrm{d}x$ sau pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial z)\,\mathrm{d}z$, sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)=0 \qquad (4.10$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)=0 \qquad (4.10'))$$

corespunzătoare termoconducţiei rectilinii staţionare conservative în care densitatea fluxului de termoconducţie laterală sau verticală se menţine constantă, adică

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\tilde{q}_x=const. \qquad (4.11)$$

sau respectiv

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\tilde{q}_z=const. \qquad (4.11')$$

Pe un interval de crustă terestră cu conductibilitate termică medie constantă între x_1 şi x_2 sau între z_1 şi z_2 în care temperatura scade de la T_1 la T_2 (fig. 4.3 a, b), din integrarea ecuaţiei (4.11) sau

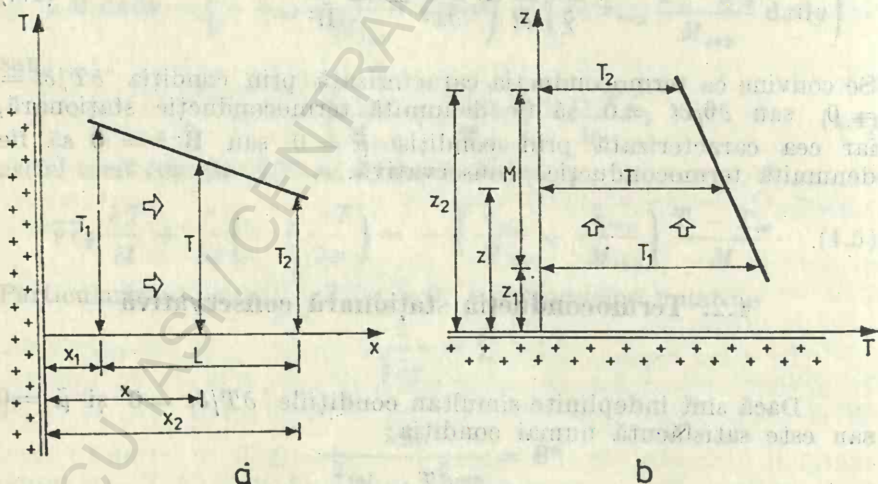


Fig. 4.3. Termoconducţia staţionară conservativă rectilinie laterală (*a*) şi verticală (*b*) pe un interval omogen şi izotrop al crustei terestre

(4.11′) mai întîi de la x_1 la x și de la x la x_2, unde $x_1 < x < x_2$, sau de la z_1 la z și de la z la z_2, unde $z_1 < z < z_2$, iar apoi pe întregul interval, rezultă respectiv ecuația de variație a temperaturii

$$T = T_1 - \frac{\tilde{q}_x}{\tilde{\varkappa}}(x - x_1) = T_2 + \frac{\tilde{q}_x}{\tilde{\varkappa}}(x_2 - x) \tag{4.12}$$

sau

$$T = T_1 - \frac{\tilde{q}_z}{\tilde{\varkappa}}(z - z_1) = T_2 + \frac{\tilde{q}_z}{\tilde{\varkappa}}(z_2 - z) \tag{4.12'}$$

și expresia densității fluxului de termoconducție

$$\tilde{q}_x = -\tilde{\varkappa}\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \tilde{\varkappa}\frac{T_1 - T_2}{L} \tag{4.13}$$

sau

$$\tilde{q}_z = -\tilde{\varkappa}\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \tilde{\varkappa}\frac{T_1 - T_2}{M}. \tag{4.13'}$$

Dacă intervalul de crustă terestră este neomogen prezentînd variații discontinue de conductibilitate termică (Vodicka, 1960, 1962; Lubimova și Nikitina, 1975; Lubimova et al., 1976) după plane dispuse perpendicular pe direcția de termoconducție (fig. 4.4) sau

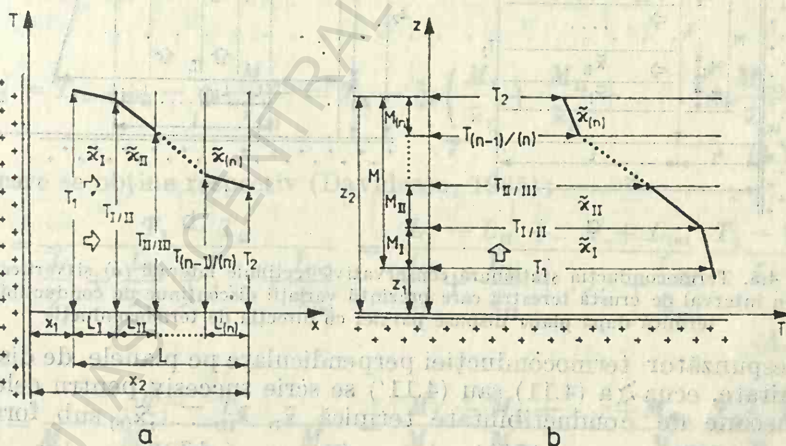


Fig. 4.4. Termoconducția staționară conservativă rectilinie laterală (*a*) și verticală (*b*) pe un interval de crustă terestră care prezintă variații discontinue de conductibilitate termică după plane dispuse perpendicular pe direcția de termoconducție

paralel cu aceasta (fig. 4.5), atunci densitatea fluxului de termoconducție laterală sau verticală are expresia de aceeași formă cu (4.11) sau (4.11′) în care însă $\tilde{\varkappa}$ se dă respectiv prin

$$\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(x) = \begin{cases} \tilde{\varkappa}_{I} = const. \text{ pentru } x_1 \leqslant x < x_{I/II}, \\ \tilde{\varkappa}_{II} = const, \text{ pentru } x_{I/II} \leqslant x < x_{II/III}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\varkappa}_{(n)} = const. \text{ pentru } x_{(n-I)/(n)} \leqslant x < x_2 \end{cases} \tag{4.14}$$

sau prin

$$\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(z) = \begin{cases} \tilde{\varkappa}_{I} = const. \text{ pentru } z_1 \leqslant z < z_{I/II} = z_1 + M_I, \\ \tilde{\varkappa}_{II} = const. \text{ pentru } z_{I/II} = z_1 + M_I \leqslant z < \\ < z_{II/III} = z_1 + M_I + M_{II}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\varkappa}_{(n)} = const. \text{ pentru } z_{(n-I)/(n)} = z_1 + M_I + \\ + \dots + M_{(n-I)} = z_2 - M_{(n)} \leqslant z < z_2. \end{cases} \tag{4.14'}$$

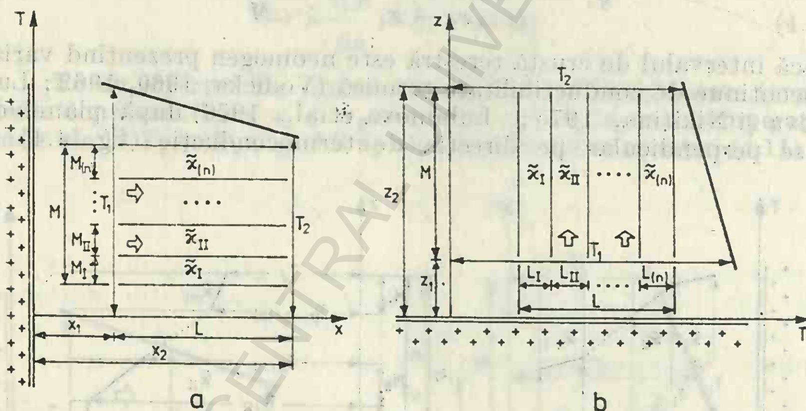


Fig. 4.5. Termoconducția staționară conservativă rectilinie laterală (a) și verticală (b) pe un interval de crustă terestră care prezintă variații discontinue de conductibilitate termică după plane dispuse paralel cu direcția de termoconducție

Corespunzător termoconducției perpendiculare pe planele de discontinuitate, ecuația (4.11) sau (4.11′) se scrie succesiv pentru cele (n) tronsoane de conductibilitate termică $\tilde{\varkappa}_I, \tilde{\varkappa}_{II}, \dots, \tilde{\varkappa}_{(n)}$ sub formele

$$-\tilde{\varkappa}_I\left(\frac{dT}{dx}\right)_I = -\tilde{\varkappa}_{II}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{II} = \dots = -\tilde{\varkappa}_{(n)}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{(n)} = \tilde{q}_x = const. \tag{4.15}$$

sau

$$-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{I}} = -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{II}} = \ldots = -\tilde{\varkappa}_{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{(n)} = \tilde{q}_z = const., \tag{4.15'}$$

de unde prin integrare rezultă că temperatura la contactele tronsoanelor are expresiile

$$T_{\mathrm{I/II}} = T_1 - \tilde{q}_x \frac{L_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}},$$

$$T_{\mathrm{II/III}} = T_{\mathrm{I/II}} - \tilde{q}_x \frac{L_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} = T_1 - \tilde{q}_x\left(\frac{L_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \frac{L_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_2 = T_{(n-1)/(n)} - \tilde{q}_x \frac{L_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}} = T_1 - \tilde{q}_x\left(\frac{L_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \frac{L_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \frac{L_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}\right) \tag{4.16}$$

sau

$$T_{\mathrm{I/II}} = T_1 - \tilde{q}_z \frac{M_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}},$$

$$T_{\mathrm{II/III}} = T_{\mathrm{I/II}} - \tilde{q}_z \frac{M_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} = T_1 - \tilde{q}_z\left(\frac{M_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \frac{M_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_2 = T_{(n-1)/(n)} - \tilde{q}_z \frac{M_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}} = T_1 - \tilde{q}_z\left(\frac{M_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \frac{M_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \frac{M_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}\right) \tag{4.16'}$$

din care se obține respectiv (Davidescu, 1965):

$$\tilde{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{L_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \dfrac{L_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \dfrac{L_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}} = \frac{L_{\mathrm{I}} + L_{\mathrm{II}} + \ldots + L_{(n)}}{\dfrac{L_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \dfrac{L_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \dfrac{L_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}} \frac{T_1 - T_2}{L} \tag{4.17}$$

sau

$$\tilde{q}_z = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{M_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \dfrac{M_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \dfrac{M_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}} = \frac{M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} + \ldots + M_{(n)}}{\dfrac{M_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \dfrac{M_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \dfrac{M_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}} \frac{T_1 - T_2}{M}. \tag{4.17'}$$

Comparînd (4.17) cu (4.13) sau (4.17′) cu (4.13′), se constată că densitatea fluxului de termoconducţie perpendiculară pe planele de discontinuitate ale unui interval neomogen de crustă terestră cu $\tilde{\varkappa}$ de forma (4.14) sau (4.14′) poate fi obţinută prin termoconducţia la aceeaşi diferenţă de temperatură $(T_1 - T_2)$ pe un interval omogen cu aceeaşi lungime $L = L_{\mathrm{I}} + L_{\mathrm{II}} + \ldots + L_{(n)}$ sau grosime $M = M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} + \ldots + M_{(n)}$ şi cu conductibilitatea termică

$$\tilde{\varkappa}_{med\perp} = \frac{L_{\mathrm{I}} + L_{\mathrm{II}} + \ldots + L_{(n)}}{\frac{L_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \frac{L_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \frac{L_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}} \tag{4.18}$$

sau respectiv

$$\tilde{\varkappa}_{med\perp} = \frac{M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} + \ldots + M_{(n)}}{\frac{M_{\mathrm{I}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}} + \frac{M_{\mathrm{II}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}} + \ldots + \frac{M_{(n)}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}}. \tag{4.18′}$$

Corespunzător termoconducţiei paralele cu planele de discontinuitate, ecuaţia (4.11) sau (4.11′) se prezintă pentru întreaga grosime $M = M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} + \ldots + M_{(n)}$ sau lungime $L = L_{\mathrm{I}} + L_{\mathrm{II}} + \ldots + L_{(n)}$ sub forma

$$\frac{M_{\mathrm{I}}}{M}\left(-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{M_{\mathrm{II}}}{M}\left(-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) + \ldots + \frac{M_{(n)}}{M}\left(-\tilde{\varkappa}_{(n)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = \tilde{q}_x = const. \tag{4.19}$$

sau

$$\frac{L_{\mathrm{I}}}{L}\left(-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right) + \frac{L_{\mathrm{II}}}{L}\left(-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right) + \ldots + \frac{L_{(n)}}{L}\left(-\tilde{\varkappa}_{(n)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right) = \tilde{q}_z = const. \tag{4.19′}$$

în care

$$-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \tilde{q}_{x_{\mathrm{I}}} = const., -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \tilde{q}_{x_{\mathrm{II}}} = const., \ldots, -\tilde{\varkappa}_{(n)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \tilde{q}_{x_{(n)}} = const. \tag{4.20}$$

sau

$$-\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\tilde{q}_{z_{\mathrm{I}}}=const.,\ -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\tilde{q}_{z_{\mathrm{II}}}=$$

$$=const.,\ldots,-\tilde{\varkappa}_{(n)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\tilde{q}_{z_{(n)}}=const, \qquad (4.20')$$

. . . .

sînt densitățile fluxurilor de termoconducție aferente celor (n) tronsoane de conductibilitate termică $\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}, \tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}},\ldots,\tilde{\varkappa}_{(n)}$ participante cu ponderile M_{I}/M, $M_{\mathrm{II}}/M,\ldots$, $M_{(n)}/M$ sau L_{I}/L, $L_{\mathrm{II}}/L\ldots$, $\ldots, L_{(n)}/L$ la constituirea densității fluxului total $\tilde{q}_x$ sau respectiv $\tilde{q}_z$. Integrînd mai întîi de la x_1 la x și de la x la x_2, unde $x_1 < x < x_2$, sau de la z_1 la z și de la z la z_2, unde $z_1 < z < z_2$, iar apoi pe întregul interval de la x_1 la x_2 sau de la z_1 la z_2 se găsesc respectiv ecuațiile de variație a temperaturii

$$T=T_1-\frac{\tilde{q}_{x_{\mathrm{I}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}(x-x_1)=T_2+\frac{\tilde{q}_{x_{\mathrm{I}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}(x_2-x),$$

$$T=T_1-\frac{\tilde{q}_{x_{\mathrm{II}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}(x-x_1)=T_2+\frac{\tilde{q}_{x_{\mathrm{II}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}(x_2-x),$$

. . . .

$$T=T_1-\frac{\tilde{q}_{x_{(n)}}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}(x-x_1)=T_2+\frac{\tilde{q}_{x_{(n)}}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}(x_2-x) \qquad (4.21)$$

sau

$$T=T_1-\frac{\tilde{q}_{z_{\mathrm{I}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}(z-z_1)=T_2+\frac{\tilde{q}_{z_{\mathrm{I}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}(z_2-z),$$

$$T=T_1-\frac{\tilde{q}_{z_{\mathrm{II}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}(z-z_1)=T_2+\frac{\tilde{q}_{z_{\mathrm{II}}}}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}(z_2-z),$$

. . . .

$$T=T_1-\frac{\tilde{q}_{z_{(n)}}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}(z-z_1)=T_2+\frac{\tilde{q}_{z_{(n)}}}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}(z_2-z) \qquad (4.21')$$

precum şi expresiile densităţilor fluxurilor de termoconducţie

$$\tilde{q}_{x_{\mathrm{I}}} = -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} \frac{T_1 - T_2}{L},$$

$$\tilde{q}_{x_{\mathrm{II}}} = -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} \frac{T_1 - T_2}{L},$$

. . . .

$$\tilde{q}_{x_{(n)}} = -\tilde{\varkappa}_{(n)} \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \tilde{\varkappa}_{(n)} \frac{T_1 - T_2}{L} \qquad (4.22)$$

sau

$$\tilde{q}_{z_{\mathrm{I}}} = -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} = \tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} \frac{T_1 - T_2}{M},$$

$$\tilde{q}_{z_{\mathrm{II}}} = -\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} = \tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} \frac{T_1 - T_2}{M},$$

. . . .

$$\tilde{q}_{z_{(n)}} = -\tilde{\varkappa}_{(n)} \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} = \tilde{\varkappa}_{(n)} \frac{T_1 - T_2}{M}. \qquad (4.22')$$

Întrucît, potrivit cu (4.19) şi (4.20) sau cu (4.19′) şi (4.21′), densitatea fluxului total $\tilde{q}_x$ sau $\tilde{q}_z$ rezultă respectiv prin însumarea densităţilor fluxurilor parţiale $(M_{\mathrm{I}}/M)\tilde{q}_{x_{\mathrm{I}}}$, $(M_{\mathrm{II}}/M)\tilde{q}_{x_{\mathrm{II}}}, \ldots, (M_{(n)}/M)\tilde{q}_{x_{(n)}}$ sau $(L_{\mathrm{I}}/L)\tilde{q}_{z_{\mathrm{I}}}$, $(L_{\mathrm{II}}/L)\tilde{q}_{z_{\mathrm{II}}}, \ldots, (L_{(n)}/L)\tilde{q}_{z_{(n)}}$, adică

$$\tilde{q}_x = \frac{M_{\mathrm{I}}}{M}\tilde{q}_{x_{\mathrm{I}}} + \frac{M_{\mathrm{II}}}{M}\tilde{q}_{x_{\mathrm{II}}} + \ldots + \frac{M_{(n)}}{M}\tilde{q}_{x_{(n)}} =$$

$$= \frac{M_{\mathrm{I}}\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}}\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} + \ldots + M_{(n)}\tilde{\varkappa}_{(n)}}{M} \frac{T_1 - T_2}{L} \qquad (4.23)$$

sau

$$\tilde{q}_z = \frac{L_{\mathrm{I}}}{L}\tilde{q}_{z_{\mathrm{I}}} + \frac{L_{\mathrm{II}}}{L}\tilde{q}_{z_{\mathrm{II}}} + \ldots + \frac{L_{(n)}}{L}\tilde{q}_{z_{(n)}} =$$

$$= \frac{L_{\mathrm{I}}\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} + L_{\mathrm{II}}\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} + \ldots + L_{(n)}\tilde{\varkappa}_{(n)}}{L} \frac{T_1 - T_2}{M}, \qquad (4.23')$$

urmează, prin comparație cu (4.13) sau cu (4.13′), că expresia conductibilității termice medii este de forma

$$\tilde{\varkappa}_{med_{\parallel}} = \frac{M_{I}\tilde{\varkappa}_{I} + M_{II}\tilde{\varkappa}_{II} + M_{(n)}\tilde{\varkappa}_{(n)}}{M} \quad (4.24)$$

sau

$$\tilde{\varkappa}_{med_{\parallel}} = \frac{L_{I}\tilde{\varkappa}_{I} + L_{II}\tilde{\varkappa}_{II} + \ldots + L_{(n)}\tilde{\varkappa}_{(n)}}{L}. \quad (4.24')$$

4.3. Termoconducția staționară neconservativă

În cazul cîmpului de temperatură staționar sau chiar cvasistaționar definit prin anularea sau cel puțin tendința de anulare a derivatei sale locale $\partial T/\partial t$, ecuația (4.2) sau (4.2′) se prezintă (Oelsner, 1976), pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial x)\mathrm{d}x$ sau respectiv pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial z)\mathrm{d}z$, sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = \tilde{\mu}(x, T) \quad (4.25)$$

sau (Kappelmeyer, 1979; Hoffers, 1981)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right) = \tilde{\mu}(z, T) \quad (4.25')$$

caracteristică termoconducției rectilinii staționare neconservative în care productivitatea medie de căldură a unității de volum (Tammemagi și Wheildon, 1974; Rybach, 1976; Pollack și Chapman, 1977; Richardson și Oxburgh, 1978; Hurtig și Stromeyer, 1979; Kappelmeyer, 1979; Rybach și Finckh, 1979) notată prin $\tilde{\mu}$ depinde numai de coordonata carteziană x sau z și de temperatura T. Prin intermediul funcției

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \tilde{q}_x$$

sau

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \tilde{q}_z$$

corespunzătoare unei densități a fluxului de termoconducție dependente de o singură coordonată carteziană, pentru care se cunoaște de regulă

$$\lim_{x\to 0}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)=\lim_{x\to 0}\tilde{q}_x=\tilde{q}_0 \tag{4.26}$$

sau

$$\lim_{z\to 0}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)=\lim_{z\to 0}\tilde{q}_z=\tilde{q}_0, \tag{4.26'}$$

ecuația (4.25) sau (4.25′) se mai poate scrie:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}_x}{\mathrm{d}x}=\tilde{\mu}(x,\, T) \tag{4.27}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}_z}{\mathrm{d}z}=\tilde{\mu}(z,\, T). \tag{4.27'}$$

Dacă productivitatea medie de căldură este uniform distribuită, adică $\tilde{\mu}=const$, atunci, prin integrarea ecuației (4.27) sau (4.27′) de la $x=0$ la x și de la $\tilde{q}_0$ la $\tilde{q}_x=-\tilde{\varkappa}\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ sau respectiv de la $z=0$ la z și de la $\tilde{q}_0$ la $\tilde{q}_z=-\tilde{\varkappa}\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$, rezultă că

$$\tilde{q}_x=-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\tilde{q}_0+\tilde{\mu}x \tag{4.28}$$

sau

$$\tilde{q}_z=-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\tilde{q}_0+\tilde{\mu}z. \tag{4.28'}$$

Pentru $\tilde{\varkappa}=const.$, integrînd (4.28) sau (4.28′) mai întîi între $x=0$ sau $z=0$ unde $T=T_0$ și $x=L$ unde $T=T_L$ sau $z=M$ unde $T=T_M$, iar apoi între $x=0$ și $x<L$ sau $z=0$ și $z<M$, se obțin ecuațiile

$$-\tilde{\varkappa}(T_L-T_0)=\tilde{q}_0L+\frac{\tilde{\mu}}{2}L^2 \tag{4.29}$$

sau

$$-\tilde{\varkappa}(T_M-T_0)=\tilde{q}_0M+\frac{\tilde{\mu}}{2}M^2 \tag{4.29'}$$

şi respectiv

$$-\tilde{\varkappa}(T - T_0) = \tilde{q}_0 x + \frac{\tilde{\mu}}{2} x^2 \tag{4.30}$$

sau

$$-\tilde{\varkappa}(T - T_0) = \tilde{q}_0 z + \frac{\tilde{\mu}}{2} z^2. \tag{4.30'}$$

Densitatea fluxului de termoconducţie se determină prin intermediul ecuaţiei (4.29) sau (4.29′) din care se găseşte pentru $\tilde{q}_0$ expresia

$$\tilde{q}_0 = \frac{\tilde{\varkappa}}{L}(T_0 - T_L) - \frac{\tilde{\mu}}{2} L \tag{4.31}$$

sau

$$\tilde{q}_0 = \frac{\tilde{\varkappa}}{M}(T_0 - T_M) - \frac{\tilde{\mu}}{2} M \tag{4.31'}$$

şi al ecuaţiei (4.28) sau (4.28′) din care, potrivit cu (4.31) sau (4.31′), se deduce, pentru $0 < x < L$ sau $0 < z < M$, formula generală

$$q_x = \frac{\tilde{\varkappa}}{L}(T_0 - T_L) - \tilde{\mu}\left(\frac{L}{2} - x\right) \tag{4.32}$$

sau

$$\tilde{q}_z = \frac{\tilde{\varkappa}}{M}(T_0 - T_M) - \tilde{\mu}\left(\frac{M}{2} - z\right) \tag{4.32'}$$

şi, pentru $x = L$ sau $z = M$, formula particulară

$$\tilde{q}_L = \frac{\tilde{\mu}}{L}(T_0 - T_L) + \frac{\tilde{\mu}}{2} L \tag{4.33}$$

sau

$$\tilde{q}_M = \frac{\tilde{\varkappa}}{M}(T_0 - T_M) + \frac{\tilde{\mu}}{2} M. \tag{4.33'}$$

Pentru calculul productivităţii medii de căldură a unităţii de volum şi al temperaturii în funcţie de coordonata x sau z se recurge la ecuaţia

(4.30) sau (4.30′) din care, substituind $\tilde{q}_0$ prin expresia sa (4.31) sau (4.31′), rezultă că

$$\tilde{\mu} = 2\tilde{\varkappa}\left[\frac{T_0 - T_L}{L(L-x)} + \frac{T - T_0}{x(L-x)}\right] \tag{4.34}$$

sau

$$\tilde{\mu} = 2\tilde{\varkappa}\left[\frac{T_0 - T_M}{M(M-z)} + \frac{T - T_0}{z(M-z)}\right] \tag{4.34'}$$

şi respectiv

$$T = T_0 - \frac{x}{L}(T_0 - T_L) + \frac{\tilde{\mu}}{2\tilde{\varkappa}}x(L-x) \tag{4.35}$$

sau

$$T = T_0 - \frac{z}{M}(T_0 - T_M) + \frac{\tilde{\mu}}{2\tilde{\varkappa}}z(M-z). \tag{4.35'}$$

Pe intervalul cuprins între $x = 0$ şi $x = L$ sau între $z = 0$ şi $z = M$, temperatura $T = T(x)$ sau $T = T(z)$ poate prezenta un extremum (maximum ca în figura 4.6 a,b sau minimum după cum sursele interioare de căldură sînt pozitive sau negative) a cărui

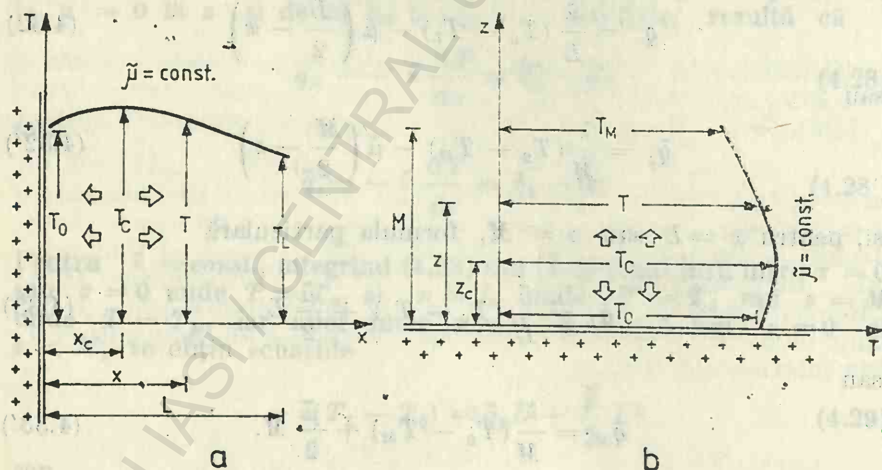


Fig. 4.6. Termoconducţia staţionară neconservativă rectilinie laterală (*a*) şi verticală (*b*) cu productivitate medie constantă de căldură a unităţii de volum

poziţie $x = x_c$ sau $z = z_c$ se determină impunînd condiţia $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$ şi deci $\tilde{q}_x = -\tilde{\varkappa}\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$ sau $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z = 0$ şi deci $\tilde{q}_z = -\tilde{\varkappa}\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}z = 0$ în ecuaţia (4.32) sau respectiv (4.32′) din care se obţine:

$$x_c = \frac{L}{2} - \frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\mu}}\,\frac{T_0 - T_L}{L} \tag{4.36}$$

sau

$$z_c = \frac{M}{2} - \frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\mu}}\,\frac{T_0 - T_M}{M}. \tag{4.36'}$$

În cazul termoconducţiei rectilinii laterale staţionare neconservative caracterizate printr-un factor de neconservativitate $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\varkappa}M/(\tilde{\varkappa}_{inf}/M_{inf} + \tilde{\varkappa}_{sup}/M_{sup})]^{1/2}$ constant (fig. 4.7), în care diferenţa

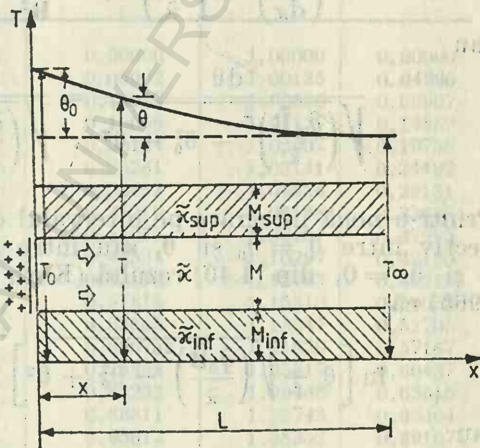


Fig. 4.7. Termoconducţia staţionară neconservativă rectilinie laterală caracterizată printr-un factor de neconservativitate $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\varkappa}M/(\tilde{\varkappa}_{inf}/M_{inf} + \tilde{\varkappa}_{sup}/M_{sup})]^{1/2}$ constant

de temperatură $\theta = T - T_\infty$ este funcţie numai de coordonata carteziană x, adică $\theta = \theta(x)$ şi deci $\mathrm{d}\theta = (\partial\theta/\partial x)\mathrm{d}x$, ecuaţia (4.8) se reţine sub forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\theta}{\tilde{\mathbf{B}}^2} \tag{4.37}$$

cu condiţia (4.26) preluată, pentru $\tilde{\varkappa} = const.$, astfel:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}} = const. \tag{4.38}$$

sau

$$\lim_{x \to L}\left(-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\tilde{q}_L}{\tilde{\varkappa}} = const. \tag{4.38'}$$

Înmulţind ecuaţia (4.37) cu $2\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ rezultă o ecuaţie de forma

$$\mathrm{d}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] = \frac{\mathrm{d}(\theta^2)}{\tilde{B}^2} \tag{4.39}$$

prin a cărei integrare, de la $\theta = \theta_0$ pentru $x = 0$ şi, conform cu (4.38), $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\tilde{q}_0/\tilde{\varkappa}$ la θ şi $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ sau de la θ şi $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ la $\theta = 0$ pentru $x = L$ şi, conform cu (4.38'), $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\tilde{q}_L/\tilde{\varkappa}$, se găseşte:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 + \frac{\theta^2 - \theta_0^2}{\tilde{B}^2} = \left(\frac{\tilde{q}_L}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 + \frac{\theta^2}{\tilde{B}^2}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\left(\frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 - \theta_0^2 + \theta^2}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\left(\frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 + \theta^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\tilde{B}}. \tag{4.40}$$

Printr-o nouă integrare pe intervalul cuprins între $x = 0$ şi x, respectiv între $\theta = \theta_0$ şi θ, sau între x şi $x = L$, respectiv între θ şi $\theta = 0$, din (4.40) rezultă (Korn şi Korn, 1961; Gheorghiu, 1965) că

$$\ln\left[\theta + \sqrt{\left(\frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 - \theta_0^2 + \theta^2}\right] - \ln\left(\theta_0 + \frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right) = \frac{x}{\tilde{B}}$$

sau

$$\ln\left(\frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right) - \ln\left[\theta + \sqrt{\left(\frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 + \theta^2}\right] = \frac{L - x}{\tilde{B}}$$

şi deci

$$\theta + \sqrt{\left(\frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 - \theta_0^2 + \theta^2} = \left(\theta_0 + \frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right) e^{x/\tilde{B}} \tag{4.41}$$

sau

$$\theta + \sqrt{\left(\frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right)^2 + \theta^2} = \frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}} e^{-(L-x)/\tilde{B}}, \tag{4.41'}$$

de unde se obține soluția

$$\theta = \frac{1}{2}\left[\left(\theta_0 + \frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right) e^{x/\tilde{B}} + \left(\theta_0 - \frac{\tilde{q}_0\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}}\right) e^{-x/\tilde{B}}\right] \qquad (4.42)$$

sau

$$\theta = -\frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}} \frac{e^{(L-x)/\tilde{B}} - e^{-(L-x)/\tilde{B}}}{2} = -\frac{\tilde{q}_L\tilde{B}}{\tilde{\varkappa}} \operatorname{sh}\frac{L-x}{\tilde{B}}. \qquad (4.42')$$

Tabelul. 4.1

Valorile uzuale ale funcțiilor exponențiale și hiperbolice (după Manualul inginerului, vol. I, 1965)

ξ	e^{ξ}	$e^{-\xi}$	sh ξ	ch ξ	th ξ
0,00	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000
0,05	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996
0,10	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967
0,15	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889
0,20	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738
0,25	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492
0,30	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131
0,35	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638
0,40	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995
0,45	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190
0,50	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212
0,55	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052
0,60	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705
0,65	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167
0,70	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437
0,75	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515
0,80	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404
0,85	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107
0,90	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630
0,95	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978
1,00	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159
1,05	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181
1,10	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050
1,15	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775
1,20	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365
1,25	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828
1,30	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172
1,35	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405
1,40	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535
1,45	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569
1,50	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515
1,60	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167

ξ	e^{ξ}	$e^{-\xi}$	sh ξ	ch ξ	th ξ
1,70	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541
1,80	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681
1,90	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624
2,00	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403
2,10	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045
2,20	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574
2,30	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010
2,40	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367
2,50	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661
2,60	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903
2,70	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101
2,80	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263
2,90	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396
3,00	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505
3,10	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595
3,20	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668
3,30	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728
3,40	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777
3,50	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818
3,60	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851
3,70	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878
3,80	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900
3,90	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918
4,00	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933
4,10	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945
4,20	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955
4,30	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963
4,40	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970
4,50	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975
4,60	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980
4,70	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983
4,80	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986
4,90	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989
5,00	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991
5,10	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993
5,20	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994
5,30	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995
5,40	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996
5,50	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99697
5,60	270,4264	0,00370	135,2114	135,2151	0,99997
5,70	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998
5,80	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998
5,90	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99998
6,00	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999
6,10	445,8578	0,00224	222,9278	222,9300	0,99999
6,20	492,7490	0,00203	246,3735	246,3755	0,99999
6,30	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999
6,40	601,8450	0,00166	300,9217	300,9233	0,99999
6,50	665,1416	0,00150	332,5701	332,5716	1,00000

(continuare tabel 4.1)

ξ	e^{ξ}	$e^{-\xi}$	sh ξ	ch ξ	th ξ
6,60	735,0952	0,00136	367,5469	367,5483	1,00000
6,70	812,4058	0,00123	406,2023	406,2035	1,00000
6,80	897,8473	0,00111	448,9231	448,9242	1,00000
6,90	992,2747	0,00101	496,1369	496,1379	1,00000
7,00	1096,633	0,000912	548,3161	548,3170	1,00000
7,10	1211,967	0,000825	605,9831	605,9839	1,00000
7,20	1339,431	0,000747	669,7150	669,7158	1,00000
7,30	1480,300	0,000676	740,1496	740,1503	1,00000
7,40	1635,984	0,000611	817,9919	817,9925	1,00000
7,50	1808,042	0,000553	904,0209	904,0215	1,00000
7,60	1998,196	0,000500	999,0977	999,0982	1,00000
7,70	2208,348	0,000453	1104,174	1104,174	1,00000
7,80	2440,602	0,000410	1220,301	1220,301	1,00000
7,90	2697,282	0,000371	1348,641	1348,641	1,00000
8,00	2980,958	0,000335	1490,479	1490,479	1,00000
8,10	3294,468	0,000304	1647,234	1647,234	1,00000
8,20	3640,950	0,000275	1820,475	1820,475	1,00000
8,30	4023,872	0,000249	2011,936	2011,936	1,00000
8,40	4447,067	0,000225	2223,533	2223,533	1,00000
8,50	4914,769	0,000203	2457,384	2457,385	1,00000
8,60	5431,660	0,000184	2715,830	2715,830	1,00000
8,70	6002,912	0,000167	3001,456	3001,456	1,00000
8,80	6634,244	0,000151	3317,122	3317,122	1,00000
8,90	7331,974	0,000136	3665,987	3665,987	1,00000
9,00	8103,084	0,000123	4051,542	4051,542	1,00000
9,20	9897,129	0,000101	4948,564	4948,565	1,00000
9,40	12088,38	0,000083	6044,190	6044,190	1,00000
9,60	14764,78	0,000068	7382,391	7382,391	1,00000
9,80	18033,74	0,000055	9016,872	9016,872	1,00000
10,00	22026,47	0,000045	11013,233	11013,233	1,00000

Dacă se aplică (4.42) la limita marcată prin $x = L$ și $\theta = 0$, iar (4.42′) la limita marcată prin $x = 0$ și $\theta = \theta_0$, atunci se deduc pentru $\tilde{q}_0$ și $\tilde{q}_L$ expresiile

$$\tilde{q}_0 = -\frac{\tilde{\varkappa}\theta_0}{\tilde{B}} \frac{e^{L/\tilde{B}} + e^{-L/\tilde{B}}}{e^{L/\tilde{B}} - e^{-L/\tilde{B}}} = -\frac{\tilde{\varkappa}\theta_0}{\tilde{B}\,\mathrm{th}\,(L/\tilde{B})} = -\frac{\tilde{\varkappa}\theta_0}{\tilde{B}}\,\mathrm{coth}\,\frac{L}{\tilde{B}} \tag{4.43}$$

și

$$\tilde{q}_L = -\frac{\tilde{\varkappa}\theta_0}{\tilde{B}} \frac{2}{e^{L/\tilde{B}} - e^{-L/\tilde{B}}} = -\frac{\tilde{\varkappa}\theta_0}{\tilde{B}\,\mathrm{sh}\,(L/\tilde{B})} \tag{4.43′}$$

cu care ecuaţia (4.42) sau (4.42′) de variaţie a temperaturii devine:

$$\theta = \theta_0 \frac{[\text{th}\,(L/\tilde{\mathbf{B}}) - 1]\, e^{x/\tilde{\mathbf{B}}} + [\text{th}\,(L/\tilde{\mathbf{B}}) + 1]\, e^{-x/\tilde{\mathbf{B}}}}{2\,\text{th}\,(L/\tilde{\mathbf{B}})} =$$

$$= \theta_0 \frac{[1 - \text{coth}\,(L/\tilde{\mathbf{B}})]\, e^{x/\tilde{\mathbf{B}}} + [1 + \text{coth}\,(L/\tilde{\mathbf{B}})]\, e^{-x/\tilde{\mathbf{B}}}}{2} =$$

$$= \theta_0 \frac{\text{sh}[(L - x)/\tilde{\mathbf{B}}]}{\text{sh}(L/\tilde{\mathbf{B}})} \qquad (4.44)$$

sau

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\text{sh}\,[(L - x)/\tilde{\mathbf{B}}]}{\text{sh}\,(L/\tilde{\mathbf{B}})}, \qquad (4.44')$$

unde $\text{sh}\ \xi = (e^{\xi} - e^{-\xi})/2$, $\text{th}\ \xi = (e^{\xi} - e^{-\xi})/(e^{\xi} + e^{-\xi})$ şi $\text{coth}\ \xi = (e^{\xi} + e^{-\xi})/(e^{\xi} - e^{-\xi})$ reprezintă *sinusul hiperbolic*, *tangenta hiperbolică* şi *cotangenta hiperbolică* de argument $\xi = (L - x)/\tilde{\mathbf{B}}$ sau $\xi = L/\tilde{\mathbf{B}}$. Valorile uzuale ale funcţiilor exponenţiale şi hiperbolice sînt înscrise în tabelul 4.1.

4.4. Termoconducţia nestaţionară conservativă

Într-o porţiune de crustă terestră cu productivitate medie de căldură nulă sau cel puţin neglijabilă, termoconducţia rectilinie se conformează (Peaceman şi Rachford, 1955), potrivit cu (4.2) sau (4.2′), ecuaţiei

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \qquad (4.45)$$

sau

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \qquad (4.45')$$

în care densitatea fluxului de termoconducţie laterală sau verticală se supune de regulă condiţiei

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ t\geqslant 0}}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ t\geqslant 0}}\tilde{q}_x=\tilde{q}_0 \qquad (4.46)$$

sau

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ t\geqslant 0}}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lim_{\substack{z\to 0\\ t\geqslant 0}}\tilde{q}_z=\tilde{q}_0. \qquad (4.46')$$

Pentru $\tilde{\rho}\tilde{c}_p = const.$, ecuaţia (4.45) sau (4.45') se prezintă (Godunov şi Reabenki, 1977), evidenţiind coeficientul de difuzivitate termică $\tilde{\varkappa}/\tilde{\rho}\tilde{c}_p = \tilde{\chi}$, sub forma

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\chi}\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0 \qquad (4.47)$$

sau

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\chi}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0, \qquad (4.47')$$

iar pentru $\tilde{\varkappa} = const.$, ecuaţia (4.45) sau (4.45') se reduce (Rothe, 1949; Salvadori şi Baron, 1961; Isaacson şi Keller, 1966; Jaeger şi Newstead, 1969; Werner şi Balke, 1978; Iordache, 1981; Zorin, 1981) la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\tilde{\chi}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0 \qquad (4.48)$$

sau

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\tilde{\chi}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0. \qquad (4.48')$$

Această ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea şi de tip parabolic poate fi integrată (Carlsraw şi Jaeger, 1964) prin *metoda separării variabilelor* (*metoda lui Bernoulli şi Fourier*) sau prin *metodele operaţionale ale transformatelor integrale* (*metodele transformatelor Fourier sau Laplace*).

În cazul termoconducţiei nestaţionare conservative rectilinii laterale pe un interval $-\infty < x < \infty$ pe care temperatura $T = T(t, x)$ se prezintă la un moment iniţial $t = 0$ printr-o funcţie

dată $T(0, x)$ și la infinit printr-o constantă $T_\infty = \lim\limits_{x \to \pm\infty} T(t, x) =$ *const.* în orice moment $t \geqslant 0$, pentru integrarea ecuației (4.48) preluate cu notația $T - T_\infty = \theta(t, x)$ sub forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \tilde{\chi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \tag{4.49}$$

și cu condiția inițială $\theta(0, x) = f(x)$ se poate folosi *metoda separării variabilelor*. Căutînd o soluție $\theta = \theta(t, x) = \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{X}(x)$ care să satisfacă ecuația (4.49)

$$\mathcal{X} \frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t} - \tilde{\chi} \mathcal{T} \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{X}}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

și separînd variabilele în expresii egale cu o aceeași valoare reținută ca negativă pentru a fi acceptabilă din punct de vedere fizic, rezultă ecuațiile diferențiale ordinare

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathcal{T}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathcal{X}} \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{X}}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda^2$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t} + \lambda^2 \tilde{\chi} \mathcal{T} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{X}}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2 \mathcal{X} = 0,$$

de unde prin integrare (Zeldovitch și Mychkis, 1974) se obțin soluțiile

$$\mathcal{T}(t, \lambda) = C_0(\lambda) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t} \quad \text{și} \quad \mathcal{X}(x, \lambda) = C_1(\lambda) \cdot \cos \lambda x + C_2(\lambda) \cdot \sin \lambda x$$

precum și

$$\theta(t, x, \lambda) = \mathcal{T}(t, \lambda) \cdot \mathcal{X}(x, \lambda) = (C_0 C_1 \cos \lambda x + C_0 C_2 \sin \lambda x) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t} =$$
$$= [A(\lambda) \cdot \cos \lambda x + B(\lambda) \cdot \sin \lambda x] \cdot \mathrm{e}^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t} \cdot \tag{4.50}$$

Dacă λ poate avea un spectru continuu de valori de la 0 la ∞, atunci soluția ecuației (4.49) se poate construi cu ajutorul integralei

$$\theta(t, x) = \int_0^\infty \theta(t, x, \lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda) \cdot \cos \lambda x + B(\lambda) \cdot \sin \lambda x] \cdot \mathrm{e}^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t}\, \mathrm{d}\lambda$$

în care $A(\lambda)$ și $B(\lambda)$ se determină folosind condiția inițială

$$\theta(0, x) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cdot \cos \lambda x + B(\lambda) \cdot \sin \lambda x] \, d\lambda = f(x),$$

iar dacă $f(x)$ se poate reprezenta prin *integrala Fourier* (Stuart, 1971)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cdot \cos \lambda(x - \xi) \, d\xi$$

preluată sub forma

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi \right] d\lambda,$$

atunci condiția inițială este satisfăcută pentru

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi \quad \text{și} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi$$

și soluția se prezintă cu expresia

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi + \sin \lambda x \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi \right] e^{-\lambda^2 \chi t} \, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \, e^{-\lambda^2 \chi t} \cos \lambda(x - \xi) \, d\xi$$

sau, schimbînd ordinea de integrare,

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \chi t} \cos \lambda(x - \xi) \, d\lambda.$$

Prin intermediul *integralei lui Poisson* (Sabac, 1965)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t} \cos \lambda(x - \xi)\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\chi}t}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}t}},$$

unde $(\tilde{\chi}t) > 0$, soluţia căutată se scrie sub forma

$$\theta = \theta(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}t}}\, d\xi \qquad (4.51)$$

sau

$$\theta = \theta(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot \mathcal{G}(t, x, \xi)\, d\xi \qquad (4.51')$$

în care

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}t}} = \mathcal{G}(t, x, \xi) \qquad (4.52)$$

este expresia *funcţiei lui Green* (Iordache şi Smigelschi, 1981) pentru termoconducţia nestaţionară conservativă rectilinie laterală pe intervalul presupus nelimitat $-\infty < x < \infty$ pe care diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = f(x)$. Dacă intervalul de integrare este limitat la $0 \leqslant x \leqslant L$, iar temperatura $T = T(t, x)$ se menţine constantă şi egală cu T_∞ la frontierele $x = 0$ şi $x = L$ (fig. 4.8), atunci soluţia (4.50) a ecuaţiei

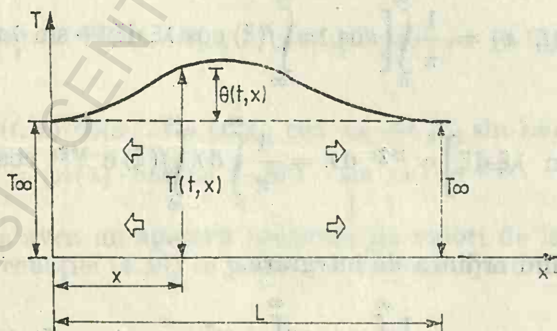


Fig. 4.8. Termoconducţia nestaţionară conservativă rectilinie laterală pe un interval limitat de crustă terestră pe ale cărui frontiere temperatura se menţine constantă

(4.49) se particularizează impunînd condiţiile la limite $\theta(t, 0) = \theta(t, L) = 0$ din care rezultă că $A = 0$, $\lambda_n = n\pi/L$ şi deci

$$\theta_n(t, x) = B_n \, e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\tilde{\chi} t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

unde $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Prin însumarea acestor soluţii particulare se obţine soluţia (Rothe, 1949)

$$\theta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\tilde{\chi} t} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{4.53}$$

cu condiţia iniţială dată prin funcţia

$$\theta(0, x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

în a cărei dezvoltare în serie pe intervalul $0 \leqslant x \leqslant L$ *coeficienţii Fourier* B_n sînt, potrivit *formulelor lui Euler şi Fourier* (Jackson, 1941; Zygmund, 1959; Stuart, 1971), de forma

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} \, d\xi.$$

Se conchide deci că soluţia (4.53) are expresia (Iordache şi Smigelschi, 1981)

$$\theta(t, x) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\tilde{\chi} t} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi\xi}{L} \, d\xi \tag{4.54}$$

în care *funcţia lui Green* este de forma

$$\mathcal{G}(t, x, \xi) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\tilde{\chi} t} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi\xi}{L}. \tag{4.55}$$

În cazul termoconducţiei nestaţionare conservative rectilinii laterale pe un interval semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ pe care temperatura $T = T(t, x)$ se prezintă la un moment iniţial $t = 0$ printr-o funcţie dată $T(0, x)$ şi satisface condiţiile $\lim_{x \to 0} T(t, x) = \lim_{x \to \infty} T(t, x) =$

$= T_\infty = const.$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} (-\tilde{\varkappa}\partial T/\partial x) = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{q}_x = 0$ în orice moment $t \geqslant 0$, ecuaţia (4.48) reluată cu $T - T_\infty = \theta(t, x)$ sub forma (4.49) şi cu condiţiile $\theta(0, x) = f(x)$, $\theta(t, 0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(t, x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0$ poate fi integrată prin intermediul *transformatei Fourier* (Bochner, 1932; Titchmarch, 1932, 1937; Wiener, 1933; Carleman, 1944; Campbell şi Foster, 1948; Bochner şi Chandrasekaran, 1949; Sneddon, 1951; Tranter, 1951; Oberhettinger, 1957; Smirnov, 1972–1975)

$$\theta_*(t, \omega) = \mathcal{F}[\theta(t, x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t, x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx$$

exprimate ca *transformată prin sinus*:

$$\theta_{*s}(t, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta(t, x)\sin\omega x\,dx.$$

Înmulţind ecuaţia (4.49) cu $\sqrt{2/\pi}\sin\omega x\,dx$ şi apoi integrînd-o pe intervalul $0 \leqslant x < \infty$, se obţine ecuaţia operaţională

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\omega x\,dx - \tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\omega x\,dx = 0$$

în care primul termen se reţine cu expresia

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\omega x\,dx = \mathcal{F}_s\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = \frac{d\theta_{*s}}{dt},$$

iar al doilea termen se prezintă, potrivit formulei de integrare prin părţi, cu dezvoltarea

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\omega x\,dx = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \right.$$

$$- \omega \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \omega x \, dx \Bigg) = - \tilde{\chi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Bigg[\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \omega x \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} -$$

$$- \omega \left(\theta \cos \omega x \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} + \omega \int_0^\infty \theta \sin \omega x \, dx \right) \Bigg]$$

și deci, întrucît $\lim\limits_{x \to 0} \theta(t, x) = \lim\limits_{x \to \infty} \theta(t, x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to \infty} [\partial \theta(t, x)/\partial x] = 0$, sub forma

$$- \tilde{\chi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \sin \omega x \, dx = \omega^2 \tilde{\chi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta(t, x) \sin \omega x \, dx = \omega^2 \tilde{\chi} \theta'_{*s}.$$

Așadar, ecuația operațională este reprezentată prin ecuația diferențială ordinară omogenă

$$\frac{d\theta_{*s}}{dt} + \omega^2 \tilde{\chi} \theta_{*s} = 0 \qquad (4.56)$$

sau

$$\frac{d\theta_{*s}}{\theta_{*s}} = - \omega^2 \tilde{\chi} \, dt$$

pentru care, prin integrare de la $t = 0$ la t și de la $\theta_{*s}(0, \omega)$ la $\theta_{*s}(t, \omega)$, se găsește soluția

$$\theta_{*s}(t, \omega) = \theta_{*s}(0, \omega) \, e^{-\omega^2 \tilde{\chi} t}$$

preluată, potrivit condiției inițiale $\theta(0, x) = f(x)$ și implicit condiției

$$\theta_{*s}(0, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \sin \omega \xi \, d\xi,$$

sub forma

$$\theta_{*s}(t, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \, e^{-\omega^2 \tilde{\chi} t} \sin \omega \xi \, d\xi. \qquad (4.57)$$

Din aplicarea *transformatei prin sinus inverse*

$$\theta(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta_{*s}(t, \omega) \sin \omega x \, d\omega,$$

se deduce că

$$\theta(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty e^{-\omega^2 \chi t} \sin \omega x \sin \omega \xi \, d\omega,$$

de unde, potrivit formulei

$$2 \sin \omega x \sin \omega \xi = \cos \omega(x - \xi) - \cos \omega(x + \xi),$$

rezultă:

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty e^{-\omega^2 \chi t} [\cos \omega(x - \xi) - \cos \omega(x + \xi)] \, d\omega.$$

Ținînd seamă de *integrala lui Poisson*

$$\int_0^\infty e^{-n^2\omega^2} \cos m\omega \, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2n} e^{-\frac{m^2}{4n^2}},$$

se obține în definitiv soluția (Iordache și Smigelschi, 1981)

$$\theta(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \chi t}} \int_0^\infty f(\xi) [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\chi t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\chi t}}] \, d\xi \qquad (4.58)$$

corespunzătoare termoconducției nestaționare conservative rectilinii laterale pe un interval semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ pe care diferența de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiția inițială $\theta(0, x) = f(x)$ și condițiile la limite $\lim_{x \to 0} \theta(t, x) = \lim_{x \to \infty} \theta(t, x) = 0$ și $\lim_{x \to \infty} [\partial \theta(t, x)/\partial x] = 0$ pentru $t \geqslant 0$. Dacă pe intervalul semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ diferența de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface însă condiția inițială $\theta(0, x) = 0$ și condițiile la limite $\lim_{x \to \infty} \theta(t, x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to\infty} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0$ şi, conform cu (4.46), $\lim\limits_{x\to 0} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = -\tilde{q}_0(t)/\tilde{\varkappa}$, atunci ecuaţia (4.49) poate fi integrată cu ajutorul *transformatei Fourier prin cosinus*

$$\theta_{*c}(t, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta(t, x)\cos \omega x\, dx.$$

Prin înmulţirea cu $\sqrt{2/\pi}\cos\ \omega x\ dx$ şi integrarea pe intervalul $0 \leqslant x < \infty$, ecuaţia (4.49) se scrie sub forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\,\omega x\, dx - \tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cos\,\omega x\, dx = 0$$

în care primul termen se exprimă conform transformării

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\ \omega x\, dx = \mathcal{F}_c\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = \frac{d\theta_{*c}}{dt},$$

iar al doilea termen preluat, potrivit formulei de integrare prin părţi, cu dezvoltarea

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cos\ \omega x\ dx = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\ \omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \right.$$

$$\left. + \omega\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\ \omega x\ dx\right] = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\ \omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \right.$$

$$\left. + \omega\left(\theta\sin\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \omega\int_0^\infty \theta\cos\ \omega x\, dx\right)\right]$$

se prezintă, folosind condiţiile $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(t, x) = 0$,

$$\lim_{x\to\infty}[\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0 \text{ şi } \lim_{x\to 0}\ [\partial\theta(t, x)/\partial x] = -\tilde{q}_0(t)/\tilde{\varkappa},$$

astfel :

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cos \omega x \,\mathrm{d}x = -\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{q}_0(t) + \omega^2\tilde{\chi}\,\theta_{*c}.$$

Urmează că ecuaţiei (4.49) îi corespunde ecuaţia operaţională

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{*c}}{\mathrm{d}t} + \omega^2\tilde{\chi}\,\theta_{*c} - \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{q}_0(t) = 0 \tag{4.59}$$

rezolvabilă prin substituţie sau prin variaţia constantelor (Rothe, 1949). Spre exemplu, prin intermediul substituţiei

$$\theta_{*c}(t, \omega) = \theta^{\mathrm{I}}_{*c}(t, \omega)\cdot\theta^{\mathrm{II}}_{*c}(t, \omega)$$

rezolvarea ecuaţiei (4.59) preluate sub forma

$$\frac{\mathrm{d}\theta^{\mathrm{II}}_{*c}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{\theta^{\mathrm{I}}_{*c}}\frac{\mathrm{d}\theta^{\mathrm{I}}_{*c}}{\mathrm{d}t} + \omega^2\tilde{\chi}\right)\theta^{\mathrm{II}}_{*c} - \frac{1}{\theta^{\mathrm{I}}_{*c}}\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{q}_0(t) = 0$$

se reduce la rezolvarea ecuaţiilor

$$\frac{1}{\theta^{\mathrm{I}}_{*c}(t, \omega)}\frac{\mathrm{d}\theta^{\mathrm{I}}_{*c}(t, \omega)}{\mathrm{d}t} + \omega^2\tilde{\chi} = 0$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}\theta^{\mathrm{II}}_{*c}(\tau, \omega)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{\theta^{\mathrm{I}}_{*c}(\tau, \omega)}\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{q}_0(\tau) = 0$$

cu $0 \leqslant \tau \leqslant t$ şi $\lim\limits_{\tau\to 0}\theta^{\mathrm{II}}_{*c}(\tau, \omega) = 0$, pentru care se reţin soluţiile

$$\theta^{\mathrm{I}}_{*c}(t, \omega) = \theta^{\mathrm{I}}_{*c}(0, \omega)\cdot \mathrm{e}^{-\omega^2\tilde{\chi}}$$

şi

$$\theta^{\mathrm{II}}_{*c}(t, \omega) = \frac{1}{\theta^{\mathrm{I}}_{*c}(0, \omega)}\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \tilde{q}_0(\tau)\,\mathrm{e}^{\omega^2\tilde{\chi}\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

astfel încît se deduce că

$$\theta_{*c}(t, \omega) = \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \tilde{q}_0(\tau)\, e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)}\, d\tau, \tag{4.60}$$

unde $\lim\limits_{t\to 0} \theta_{*c}(t, \omega)$ are expresia

$$\theta_{*c}(0, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta(0, \xi) \cos \omega\xi \, d\xi.$$

Aplicînd *teorema de inversiune a transformatei prin cosinus* potrivit căreia

$$\theta(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta_{*c}(t, \omega) \cos \omega x \, d\omega,$$

se obţine soluţia

$$\theta(t, x) = \frac{2\tilde{\chi}}{\pi \tilde{\varkappa}} \int_0^t \tilde{q}_0(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cos \omega x \, d\omega$$

prezentată în definitiv, prin intermediul *integralei lui Poisson*

$$\int_0^\infty e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cos \omega x \, d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}},$$

sub forma (Iordache şi Smigelschi, 1981)

$$\theta(t, x) = \frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tilde{q}_0(\tau)}{\tilde{\varkappa}\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}\, d\tau. \tag{4.61}$$

În cazul termoconducţiei nestaţionare conservative rectilinii laterale pe un interval semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ pe care temperatura $T = T(t, x)$ satisface condiţia iniţială $T(0, x) = T_\infty = const.$ şi con-

diția la limită $T(t, 0) = T_0(t)$ pentru $t \geqslant 0$, unde $T_0(0) = T_\infty = const.$ (fig. 4.9), ecuația (4.48) preluată cu notația $T - T_\infty = \theta((t, x)$ prin (4.49) și cu condițiile $\theta(0, x) = 0$, $\theta(t, 0) = \theta_0(t)$ și $\theta_0(0) = 0$ poate fi integrată prin *metoda operațională a transformatei Laplace*

$$\theta^*(p, x) = \mathcal{L}[\theta(t, x)] = \int_0^\infty \theta(t, x)\, e^{-pt}\, dt.$$

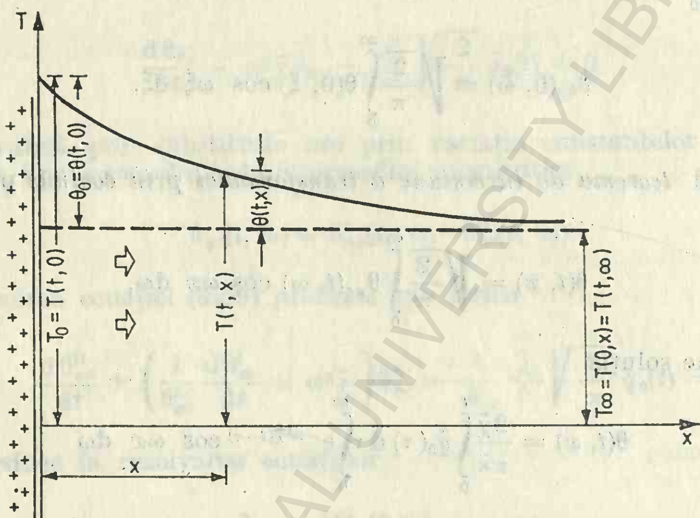


Fig. 4.9. Termoconducția nestaționară conservativă rectilinie laterală pe un interval semiinfinit pe care temperatura este inițial constantă și ulterior variabilă dinspre frontiera accesibilă unde devine nestaționară spre infinit unde se menține constantă

Folosirea acestei metode pentru rezolvarea ecuației (4.49) este justificată atît timp cît $\theta_0(t)$ satisface condițiile impuse funcției « original » în transformarea Laplace (vezi tabelul 4.2), iar $\theta = \theta(t, x)$ împreună cu derivatele sale de primele două ordine sînt, de asemenea, funcții «original» în raport cu variabila t. Aplicînd operatorul lui Laplace sub formele

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] = p\theta^*(p, x) - \theta(0, x) \text{ unde } \theta(0, x) = 0 \text{ prin condiția inițială,}$$

și

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} e^{-pt}\, dt = \frac{d^2 \theta^*}{dx^2},$$

Tabelul 4.2

Transformarea Laplace (după Gutmann, 1965; Sabac, 1965; Jaeger și Neustead, 1971; Ditkine și Proudnikov, 1978)

Funcția « original » sau transformata inversă Mellin-Fourier	Funcția « imagine » sau transformata Laplace unilaterală a funcției $f(t)$
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varsigma_0 - i\infty}^{\varsigma_0 + i\infty} F(p) e^{pt} \, dp$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \, e^{-pt} \, dt$
este de variabilă reală t și satisface condițiile: $f(t) = 0$ pentru $t < 0$, $f(t)$ derivabilă pe porțiuni (cu discontinuități numai de prima speță), $\lvert f(t) \rvert < \Lambda e^{\lambda_0 t}$ pentru $t \geqslant 0$, $\Lambda > 0$ și $\lambda_0 \geqslant 0$	este de variabilă complexă $p = \varsigma_0 + i\tau$ și satisface condițiile: $F(p)$ analitică în planul complex $p = \varsigma + i\tau$ și olomorfă într-un semiplan $\mathrm{Re}\, p = \varsigma > \varsigma_0$, $\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0$ și $\lvert F(p) \rvert < \frac{\Lambda}{\varsigma - \varsigma_0}$
Proprietăți ale transformatei	**Laplace, teoreme și operații**
1) Liniaritatea (aditivitatea și omogenitatea) $f_1(t) + f_2(t)$	$\mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$
și $const \cdot f(t)$	și $const \cdot \mathcal{L}[f(t)] = const \cdot F(p)$
2) Teorema întîrzierii $f(t - \tau)$ pentru $0 \leqslant \tau \leqslant t$	$e^{-p\tau} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-p\tau} F(p)$
3) Teorema deplasării $e^{\pm \lambda t} f(t)$	$F(p \pm \lambda)$ pentru $\mathrm{Re}(p \mp \lambda) > \varsigma_0$
4) Teorema asemănării (de multiplicare a argumentului originalului) $f(\omega t)$ pentru ω real	$\frac{F(p/\omega)}{\omega}$
5) Teorema de multiplicare a argumentului imaginii $\frac{f(t/\omega)}{\omega}$ pentru ω real și pozitiv	$F(\omega p)$
6) Derivata originalului $\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - p^{n-1} \left\{ f(0) + \frac{1}{p} \left[\frac{df(t)}{dt} \right]_{t=0} + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}} \left[\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right]_{t=0} \right\}$

(continuare tabel 4.2)

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$
7) Derivata imaginii	
$-tf(t)$	$\dfrac{dF(p)}{dp}$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\dfrac{d^n F(p)}{dp^n}$
8) Integrala originalului	
$\int_0^t f(t)\; dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$
9) Integrala imaginii	
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p)\, dp$
10) Produsul de convoluţie (compoziţie) al lui Borel	
$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
11) Produsul de convoluţie al imaginilor	
$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1 * F_2 = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{\varsigma_0 - i\infty}^{\varsigma_0 + i\infty} F_1(\lambda) \cdot F_2(p-\lambda)\, d\lambda$
12) Teorema lui Duhamel	
$d(f_1 * f_2)/dt = f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \left[\dfrac{df_2(t)}{dt} \right]_{t \mid t-\tau} d\tau$	$pF_1(p) \cdot F_2 \cdot (p)$
Corespondenţe	
13) 1	$\dfrac{1}{p}$
14) $\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ pentru n întreg şi pozitiv	$\dfrac{1}{p^n}$

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
15) $e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
16) $\frac{e^{-\lambda t/\omega}}{\omega}$	$\frac{1}{\omega p + \lambda}$
17) $1 - e^{-t/\omega}$	$\frac{1}{p(\omega p + 1)}$
18) $\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$	$\frac{1}{p(p + \lambda)}$
19) $\sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$
20) $\mathrm{sh}\ \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}$
21) $\cos \lambda t$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$
22) $\mathrm{ch}\ \lambda t$	$\frac{p}{p^2 - \lambda^2}$
23) $\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$	$\frac{1}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)}$
24) $t^{n-1} e^{\lambda t}$ pentru $n > 0$	$\frac{(n-1)!}{(p - \lambda)^n} = \frac{\Gamma(n)}{(p - \lambda)^n}$
25) $\frac{(1 - e^{-t/\omega})^n}{n!}$	$\frac{1}{p(\omega p + 1)(\omega p + 2) \ldots (\omega p + n)}$
26) $\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p + \lambda}}$

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
27) $\dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p - \lambda_2} - \sqrt{p - \lambda_1}$
28) $-\ln(\lambda t)$	$\dfrac{\ln p}{p}$
29) $\left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln(\lambda t)\right]\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{\ln p}{p^{n+1}}$
30) $\dfrac{\omega}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-\omega^2/4t}$ pentru $\omega > 0$	$e^{-\omega\sqrt{p}}$
31) $\dfrac{e^{-\omega^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{e^{-\omega\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
32) $\operatorname{erf}\left(\dfrac{\omega}{2\sqrt{t}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\omega/(2\sqrt{t})} e^{-\xi^2}\, d\xi$	$\dfrac{1 - e^{-\omega\sqrt{p}}}{p}$
33) $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{\omega}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\omega/(2\sqrt{t})} e^{-\xi^2}\, d\xi$	$\dfrac{e^{-\omega\sqrt{p}}}{p}$
34) $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-\omega^2/4t} - \omega \operatorname{erfc}\left(\dfrac{\omega}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-\omega\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$
35) $\dfrac{2}{L}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\dfrac{n\pi x}{L} \sin\dfrac{n\pi\xi}{L}$	
pentru $0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant L$	$\dfrac{\operatorname{sh}[(L-\xi)\sqrt{p}]\operatorname{sh}(x\sqrt{p})}{\sqrt{p}\operatorname{sh}(L\sqrt{p})}$
pentru $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant L$	$\dfrac{\operatorname{sh}[(L-x)\sqrt{p}]\operatorname{sh}(\xi\sqrt{p})}{[\sqrt{p}\operatorname{sh}(L/\sqrt{p})}$

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
36) $\left.\begin{matrix} \dfrac{1}{\pi\sqrt{t(2-t)}} & \text{pentru } t < 2, \\ 0 & \text{pentru } t > 2, \end{matrix}\right\}$	$e^{-p} I_0(p) = e^{-p} \lim_{\nu \to 0} I_{\pm\nu}(p) = e^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n}$
37) $\left.\begin{matrix} 0 & \text{pentru } 0 < t < 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} & \text{pentru } t > 1 \end{matrix}\right\}$	$K_0(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(p)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(p)}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} = \frac{e^{-p}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-p\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(1+\lambda/2)}}$
38 $\left.\begin{matrix} 0 & \text{pentru } 0 < t < \omega, \\ \ln\left[\dfrac{}{\omega} + \sqrt{\left(\dfrac{t}{\omega}\right)^2 - 1}\right] & \text{pentru } t > \omega \end{matrix}\right\}$	$\frac{1}{p} K_0(\omega p)$
39) $\frac{e^{-\omega^2/4t}}{t}$	$2K_0(\omega\sqrt{p})$
40) $\int_0^t \frac{e^{-\omega^2/4t}}{t}\, dt = -\int_\infty^{u=\omega^2/4t} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{\omega^2/4t}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du = -Ei\left(-\frac{\omega^2}{4t}\right)$	$\frac{2}{p} K_0(\omega\sqrt{p})$

ecuaţia (4.49) se transformă integral (Jaeger şi Newstead, 1971; Ditkine şi Proudnikov, 1978) în ecuaţia operaţională

$$p\theta^* - \tilde{\chi} \frac{d^2\theta^*}{dx^2} = 0 \tag{4.62}$$

cu condiţia la limită $\theta^*(p, 0) = \theta_0^*(p)$ şi cu soluţia generală Rothe, 1949 ; Sabac, 1965 ; Zeldovitch şi Mychkis, 1974)

$$\theta^*(p,x) = C_1 e^{x\sqrt{p/\chi}} + C_2 e^{-x\sqrt{p/\chi}} \tag{4.63}$$

la care se consideră în planul variabilei $p = \varsigma + i\tau$ tăietura dată prin $\tau = 0$ şi $\varsigma \leqslant 0$ şi se notează cu $\sqrt{p}$ ramura valorilor pozitive pentru p real şi pozitiv. Prin impunerea condiţiei ca limita funcţiei $\theta^* = \theta^*(p, x)$ să fie finită pentru $x \to \infty$ şi a condiţiei la limită $\theta^*(p, 0) = \theta_0^*(p)$, care implică respectiv $C_1 = 0$ şi $C_2 = \theta_0^*(p)$, soluţia (4.63) devine :

$$\theta^*(p, x) = \theta_0^*(p) \cdot e^{-(x/\sqrt{\chi})\sqrt{p}}, \tag{4.64}$$

unde $\sqrt{\chi} > 0$. Dacă la extremitatea $x = 0$ a intervalului semiinfinit se menţine o diferenţă de temperatură θ_0 constantă reprezentată printr-o *transformată Carson* (Gutmann, 1965)

$$\theta_0(p) = p\theta_0^*(p) = p\int_0^\infty \theta_0(t)\, e^{-pt}\, dt$$

denumită şi *transformată Laplace-Carson* (Ditkine şi Proudnikov, 1978), atunci funcţiei $\theta^* = \theta^*(p, x)$ preluate sub forma

$$\theta^*(p, x) = \frac{\theta_0}{p}\, e^{-(x/\sqrt{\chi})\sqrt{p}}$$

îi corespunde, potrivit transformării 33 din tabelul 4.2, funcţia ≪original≫

$$\theta(t, x) = \theta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right) = \theta_0\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)\right] \tag{4.65}$$

în care

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{\chi t})} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

şi

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

sînt respectiv *funcţia erorilor* (*funcţia lui Gauss* sau *integrala de probabilitate*) şi *complementara sa* cu valorile uzuale prezentate în tabelul 4.3. Dacă însă la limita $x = 0$ diferenţa de temperatură θ_0 este variabilă în timp, atunci pentru deducerea soluţiei $\theta = \theta(t, x)$ se recurge la *teorema lui Duhamel* (vezi transformarea 12 din tabelul 4.2) în care funcţia $f_1(t)$ şi transformata sa $F_1(p) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ sînt reprezentate prin $\theta(t, 0) = \theta_0(t)$ şi respectiv prin $\theta^*(p, 0) = \theta_0^*(p)$, iar funcţia $f_2(t)$ şi transformata sa $F_2(p) = \mathcal{L}[f_2(t)]$ sînt date, corespunzător cazului particular fundamental al termoconducţiei nestaţionare conservative rectilinii laterale spre o frontieră cu temperatură constantă, prin erfc $[x/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})]$ şi respectiv prin $(1/p)\, e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}}$. Substituind $f_2(0)$ prin

$$\lim_{t\to 0}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right] = \operatorname{erfc}(\infty) = 0$$

şi $[df_2(t)/dt]_{t|t-\tau}$ prin

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right]\right\}_{t|t-\tau} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-x^2/(4\tilde{\chi}t)} \cdot \frac{x}{4t\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right]_{t|t-\tau} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/[4\tilde{\chi}(t-\tau)]} \cdot \frac{x}{4(t-\tau)\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}},$$

din aplicarea *teoremei lui Duhamel* rezultă funcţia ≪imagine≫

$$\theta_0^*(p)\, e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}} = \mathcal{L}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \theta_0(\tau) \cdot e^{-x^2/[4\tilde{\chi}(t-\tau)]} \cdot \frac{x}{4(t-\tau)\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}\, d\tau\right]$$

cu transformata inversă

$$\theta(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[\theta_0^*(p)\, e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}}] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \theta_0(\tau) \cdot e^{-x^2/[4\tilde{\chi}(t-\tau)]} \quad \frac{x}{4(t-\tau)\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}\, d\tau,$$

de unde, prin schimbarea de variabilă

$$\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}} = \xi_\tau$$

potrivit căreia

$$\tau = t - \frac{x^2}{4\tilde{\chi}\xi_\tau^2}$$

şi

$$\frac{x}{4(t-\tau)\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right) = -\,\mathrm{d}\xi_\tau,$$

se obţine în definitiv soluţia

$$\theta(t, x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})} \theta_0\left(t - \frac{x^2}{4\tilde{\chi}\xi_\tau^2}\right)\mathrm{e}^{-\xi_\tau^2}\,\mathrm{d}\xi_\tau =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})}^{\infty} \theta_0\left(t - \frac{x^2}{4\tilde{\chi}\xi_\tau^2}\right)\mathrm{e}^{-\xi_\tau^2}\,\mathrm{d}\xi_\tau \qquad (4.66)$$

corespunzătoare cazului general al termoconducţiei nestaţionare conservative rectilinii laterale pe un interval semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ pe care diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ este iniţial nulă şi ulterior variabilă dinspre frontiera accesibilă $x = 0$ unde devine nestaţionară spre infinit unde să menţine nulă. Dacă pe intervalul semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$ şi condiţiile la limite $\lim_{x\to\infty} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0$ şi, conform cu (4.46), $\lim_{\substack{x\to 0\\ t\geqslant 0}} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = -\tilde{q}_0/\tilde{\chi} = const.$, atunci pentru integrarea ecuaţiei (4.49) prin intermediul *transformatei* sale *Laplace* (4.62) se recurge, de asemenea, la soluţia (4.63) cu derivata în raport cu x preluată sub forma

$$\frac{\mathrm{d}\theta^*(p, x)}{\mathrm{d}x} = C_1\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{p/\tilde{\chi}}} - C_2\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{p/\tilde{\chi}}}$$

şi cu condiţiile

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{d}\theta^*(p, x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{x\to\infty}\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta(t, x)}{\partial x}\right] = 0$$

și

$$\lim_{x\to 0} \frac{d\theta^*(p, x)}{dx} = \lim_{x\to 0} \mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta(t, x)}{\partial x}\right] = -\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa} p}$$

care implică respectiv $C_1 = 0$ și $-C_2\sqrt{p/\tilde{\chi}} = -\tilde{q}_0/(\tilde{\varkappa}p)$ sau $C_2 = (\tilde{q}_0\sqrt{\tilde{\chi}})/(\tilde{\varkappa}p\sqrt{p})$. În consecință, soluția (4.63) este redată prin funcția «imagine»

$$\theta^*(p, x) = \frac{\tilde{q}_0\sqrt{\tilde{\chi}}}{\tilde{\varkappa}} \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} \cdot e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}} \qquad (4.67)$$

căreia îi corespunde, potrivit transformării 34 din tabelul 4.2, funcția «original»

$$\theta(t, x) = \frac{\tilde{q}_0\sqrt{\tilde{\chi}}}{\tilde{\varkappa}}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}} - \frac{x}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right], \qquad (4.68)$$

unde $(x/\sqrt{\tilde{\chi}}) > 0$.

În cazul termoconducției nestaționare conservative rectilinii verticale pe un interval limitat $0 \leqslant z \leqslant M$ pe care temperatura $T = T(t, z)$ se prezintă la un moment inițial $t = 0$ printr-o funcție dată $f(z)$ pentru $0 \leqslant z \leqslant M$ și se menține constantă și egală cu T_0 la frontiera $z = 0$, iar densitatea fluxului de termoconducție $-\tilde{\varkappa}\partial T/\partial z$ se menține constantă și egală cu $\tilde{q}_M$ la frontiera $z = M$ în orice moment $t \geqslant 0$ (fig. 4.10), ecuația (4.48′) se poate relua prin substituția $T(t, z) - T_0 + (\tilde{q}_M/\tilde{\varkappa})z = \theta_z(t, z)$ sub forma

$$\frac{\partial\theta_z}{\partial t} - \tilde{\chi}\frac{\partial^2\theta_z}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.69)$$

cu condiția inițială

$$\theta_z(0, z) = f(z) - T_0 + \frac{\tilde{q}_M}{\tilde{\varkappa}} z$$

și cu condițiile la limite

$$\theta_z(t, 0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial\theta_z}{\partial z}(t, M) = 0.$$

Pentru integrarea ecuației (4.69) se aplică *metoda separării variabilelor* prin intermediul unei soluții $\theta_z = \theta_z(t, z) = \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{Z}(z)$ care

o satisface sub forma

$$\mathscr{Z}\,\frac{d\mathscr{T}}{dt}-\tilde{\chi}\mathscr{T}\,\frac{d^2\mathscr{Z}}{dz^2}=0$$

sau

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathscr{T}}\,\frac{d\mathscr{T}}{dt}=\frac{1}{\mathscr{Z}}\,\frac{d^2\mathscr{Z}}{dz^2},$$

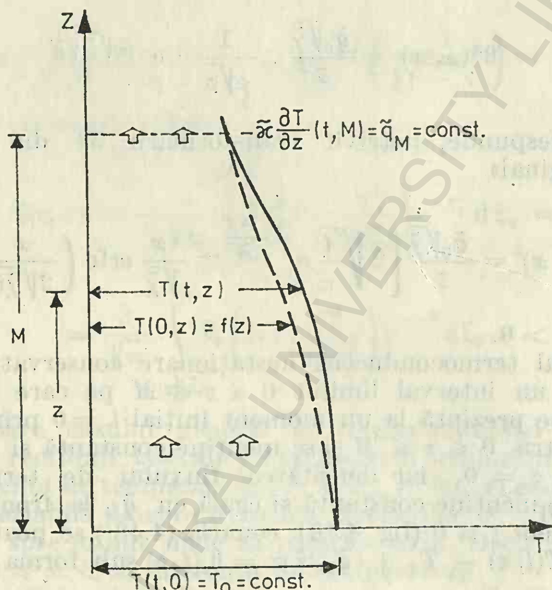


Fig. 4.10. Termoconducţia nestaţionară conservativă rectilinic verticală pe un interval limitat pe care iniţial temperatura este dată printr-o funcţie de adîncime, iar ulterior temperatura se menţine constantă la frontiera inferioară şi densitatea fluxului de termoconducţie se menţine constantă la frontiera superioară

unde variabilele sînt separate astfel încît membrul stîng nu depinde de z, iar cel drept nu depinde de t, ei avînd o valoare comună acceptabilă numai ca negativă deoarece se caută o soluţie mărginită pentru $t > 0$, adică

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathscr{T}}\,\frac{d\mathscr{T}}{dt}=\frac{1}{\mathscr{Z}}\,\frac{d^2\mathscr{Z}}{dz^2}=-\lambda^2$$

şi deci

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t} + \lambda^2\tilde{\chi}\mathcal{T} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{Z}}{\mathrm{d}z^2} + \lambda^2\mathscr{Z} = 0.$$

Întrucît aceste ecuaţii diferenţiale ordinare au soluţiile

$$\mathcal{T}(t, \lambda) = C_0(\lambda)\cdot \mathrm{e}^{-\lambda^2\tilde{\chi}t} \quad \text{şi} \quad \mathscr{Z}(z, \lambda) = C_1(\lambda)\cos \lambda z + C_2(\lambda) \sin \lambda z,$$

urmează că funcţia $\theta_z(t, z, \lambda) = \mathcal{T}(t, \lambda)\cdot\mathscr{Z}(z, \lambda)$ este de forma

$$\theta_z(t, z, \lambda) = (C_0C_1\cos \lambda z + C_0C_2 \sin \lambda z)\,\mathrm{e}^{-\lambda^2\tilde{\chi}t} =$$

$$= [A(\lambda)\cos \lambda z + B(\lambda) \sin \lambda z]\,\mathrm{e}^{-\lambda^2\tilde{\chi}t} \qquad (4.70)$$

şi are derivata parţială în raport cu z

$$\frac{\partial\theta_z}{\partial z} = -\lambda[A(\lambda)\sin \lambda z - B(\lambda)\cos \lambda z]\,\mathrm{e}^{-\lambda^2\tilde{\chi}t},$$

în care $t \geqslant 0$ şi $0 \leqslant z \leqslant M$. Impunînd condiţiile la limite $\theta_z(t, 0) = 0$ şi $[\partial\theta_z(t, z)/\partial z]_{z=M} = 0$, se deduce că $A = 0$ şi respectiv $\lambda_n = (2n+1)\pi/(2M)$, deci soluţia (4.70) se exprimă sub forma particulară

$$[\theta_z(t, z)]_n = B_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4M^2}\tilde{\chi}t}\cdot \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2M},$$

unde $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Din însumarea acestor soluţii particulare rezultă că ecuaţia (4.69) are soluţia

$$\theta_z(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\theta_z(t, z)]_n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4M^2}\tilde{\chi}t}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2M} \qquad (4.71)$$

în care coeficienţii B_n se pot determina folosind condiţia iniţială

$$\theta_z(0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2M} = f(z) - T_0 + \frac{\tilde{q}_M}{\tilde{\varkappa}}z.$$

Deoarece seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2M}$$

reprezintă o *funcție impară* (Stuart, 1971), trebuie ca și funcția $f(z) - T_0 + (\tilde{q}_M/\varkappa)z$ să fie impară conform dezvoltării

$$f(z) - T_0 + \frac{\tilde{q}_M}{\varkappa} z = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n' + B_n'' + B_n''') \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2M},$$

unde *coeficienții Fourier* B_n', B_n'' și B_n''' ai funcțiilor impare $f(z)$, $-T_0$ și $(\tilde{q}_M/\varkappa)z$ au expresiile

$$B_n' = \frac{2}{M}\int_0^M f(\zeta) \sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta,$$

$$B_n'' = \frac{2}{M}\int_0^M - T_0 \sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta =$$

$$\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\int_0^M - \frac{(2n+1)\pi}{2M} \sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta =$$

$$= \frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\int_1^0 d\left[\cos \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M}\right] = -\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}$$

și

$$B_n''' = \frac{2}{M}\int_0^M \frac{\tilde{q}_M}{\varkappa}\cdot\zeta\cdot\sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta =$$

$$= -\frac{4\tilde{q}_M}{(2n+1)\pi\varkappa}\int_0^M -\zeta\frac{(2n+1)\pi}{2M} \sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta =$$

$$= -\frac{4\tilde{q}_M}{(2n+1)\pi\varkappa}\left[\zeta \cos \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M}\Big|_{\zeta=0}^{\zeta=M} - \int_0^M \cos \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta\right] =$$

$$= \frac{4\tilde{q}_M}{(2n+1)\pi\varkappa}\left[\frac{2M}{(2n+1)\pi}\int_0^M \frac{(2n+1)\pi}{2M} \cos \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M} d\zeta\right] =$$

$$= \frac{8M\tilde{q}_M}{(2n+1)^2\pi^2\varkappa}\int_0^1 d\left[\sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M}\right] = \frac{8M\tilde{q}_M}{(2n+1)^2\pi^2\varkappa},$$

astfel încît coeficienţii B_n sînt de forma

$$B_n = B'_n + B''_n + B'''_n = \frac{2}{M}\int_0^M f(\zeta)\sin\frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M}\,\mathrm{d}\zeta -$$

$$-\frac{4}{(2n+1)\pi}\left[T_0 - \frac{2M}{(2n+1)\pi}\cdot\frac{\tilde{q}_M}{\tilde{\varkappa}}\right]$$

şi deci soluţia (4.71) se scrie:

$$\theta_z(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{M}\int_0^M f(\zeta)\sin\frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M}\,\mathrm{d}\zeta -\right.$$

$$\left.-\frac{4}{(2n+1)\pi}\left[T_0 - \frac{2M}{(2n+1)\pi}\cdot\frac{\tilde{q}_M}{\tilde{\varkappa}}\right]\right\}\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4M^2}\tilde{\varkappa}t}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2M}$$

sau în definitiv

$$T(t, z) = T_0 - \frac{\tilde{q}_M}{\tilde{\varkappa}}z + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{M}\int_0^M f(\zeta)\sin\frac{(2n+1)\pi\zeta}{2M}\,\mathrm{d}\zeta -\right.$$

$$\left.-\frac{4}{(2n+1)\pi}\left[T_0 - \frac{2M}{(2n+1)\pi}\cdot\frac{\tilde{q}_M}{\tilde{\varkappa}}\right]\right\}\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4M^2}\tilde{\varkappa}t}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2M}. \tag{4.72}$$

4.5. Termoconducţia nestaţionară neconservativă

Ecuaţia (4.2) sau (4.2′) cu forma ei generală este caracteristică termoconducţiei nestaţionare neconservative rectilinii laterale sau verticale în care densitatea fluxului de termoconducţie se supune de regulă condiţiei uzuale (4.46) sau (4.46′). Pentru o porţiune de crustă terestră cu conductibilitatea termică constantă, ecuaţia (4.2)

sau (4.2′) se prezintă sub forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \tilde{\chi}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} \tag{4.73}$$

sau

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \tilde{\chi}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} \tag{4.73'}$$

în care se presupune că difuzivitatea termică $\tilde{\chi} = \tilde{\varkappa}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}$ este constantă, iar productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică $\tilde{\mu}\,\mathrm{d}V/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\mathrm{d}V = \tilde{\mu}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}$ depinde de timp și de coordonata x sau z fie, potrivit cu (4.7) sau (4.8), prin intermediul temperaturii conform funcției

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} = -\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\mathbf{B}}^2}[T(t, x) - T_\infty] = -\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\mathbf{B}}^2}\theta(t, x),$$

fie prin intermediul unei funcții date

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} = f_x(t, x) \quad \text{sau} \quad \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}} = f_z(t, z).$$

În cazul termoconducției nestaționare neconservative rectilinii laterale pe un interval presupus infinit $-\infty < x < +\infty$ pe care productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică se conformează funcției $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} = -(\tilde{\chi}/\tilde{\mathbf{B}}^2)(T - T_\infty)$, iar temperatura $T = T(t, x)$ este reprezentată la un moment inițial $t = 0$ printr-o funcție de coordonata x și la infinit printr-o constantă $T_\infty = \lim\limits_{x \to \pm\infty} T(t, x) = const.$ în orice moment $t \geqslant 0$, ecuația (4.73) preluată cu notația $T - T_\infty = \theta(t, x)$ sub forma (4.8)

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\theta}{\tilde{\mathbf{B}}^2}$$

și cu condiția inițială $\theta(0, x) = f(x)$ se poate integra prin *metoda separării variabilelor*. Prin intermediul unei soluții $\theta = \theta(t, x) = \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{X}(x)$ ecuația (4.8) se aduce la forma

$$\frac{\mathcal{X}}{\tilde{\chi}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t} - \mathcal{T}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathcal{T}\mathcal{X}}{\tilde{\mathbf{B}}^2}$$

din care variabilele se separă în expresii egale cu o aceeași valoare reținută ca negativă pentru a fi acceptabilă din punct de vedere fizic, adică

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathcal{T}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tilde{\mathrm{B}}^2}=\frac{1}{\mathcal{X}}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda^2,$$

astfel încît se obțin ecuațiile diferențiale ordinare

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{1}{\tilde{\mathrm{B}}^2}+\lambda^2\right)\tilde{\chi}\mathcal{T}=0 \quad \text{și} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2\mathcal{X}=0$$

cu soluțiile

$$\mathcal{T}(t,\lambda)=C_0(\lambda)\cdot \mathrm{e}^{-(1/\tilde{\mathrm{B}}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t} \quad \text{și} \quad \mathcal{X}(x,\lambda)=C_1(\lambda)\cos\lambda x+C_2(\lambda)\sin\lambda x.$$

Urmează că funcția $\theta(t,x,\lambda)=\mathcal{T}(t,\lambda)\cdot\mathcal{X}(x,\lambda)$ este de forma

$$\theta(t,x,\lambda)=(C_0C_1\cos\lambda x+C_0C_2\sin\lambda x)\,\mathrm{e}^{-(1/\tilde{\mathrm{B}}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}=$$

$$=[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{e}^{-(1/\tilde{\mathrm{B}}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}, \tag{4.74}$$

iar soluția ecuației (4.8) construită cu ajutorul integralei

$$\theta(t,x)=\int_0^\infty\theta(t,x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

are expresia

$$\theta(t,x)=\int_0^\infty[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{e}^{-(1/\tilde{\mathrm{B}}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}\cdot\mathrm{d}\lambda \tag{4.75}$$

în care coeficienții $A(\lambda)$ și $B(\lambda)$ se determină prin condiția inițială

$$\theta(0,x)=\int_0^\infty[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda=f(x).$$

Reprezentînd funcția $f(x)$ prin *integrala Fourier* (Stuart, 1971)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda$$

prin care condiţia iniţială este satisfăcută pentru

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi \quad \text{şi} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi,$$

iar soluţia (4.75) se aduce la forma

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi + \sin\lambda x \times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\Big]\,\mathrm{e}^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\lambda$$

şi efectuînd, potrivit *integralei lui Poisson*, substituirea

$$\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2\tilde{\chi}t}\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\chi}t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}t}},$$

unde $(\tilde{\chi}t) > 0$, rezultă că

$$\theta(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\chi}t}{\tilde{B}^2}-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}t}}\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.76}$$

Dacă intervalul de integrare este limitat la $0 \leqslant x \leqslant L$, iar diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = f(x)$ şi condiţiile la limite $\theta(t, 0) = \theta(t, L) = 0$ (fig. 4.11), atunci

soluția (4.74) se particularizează, potrivit condițiilor la limite care implică $A = 0$ și $\lambda_n = n\pi/L$, sub forma

$$\theta_n(t, x) = B_n \, e^{-\left(\frac{1}{\tilde{B}^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tilde{\varkappa} t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

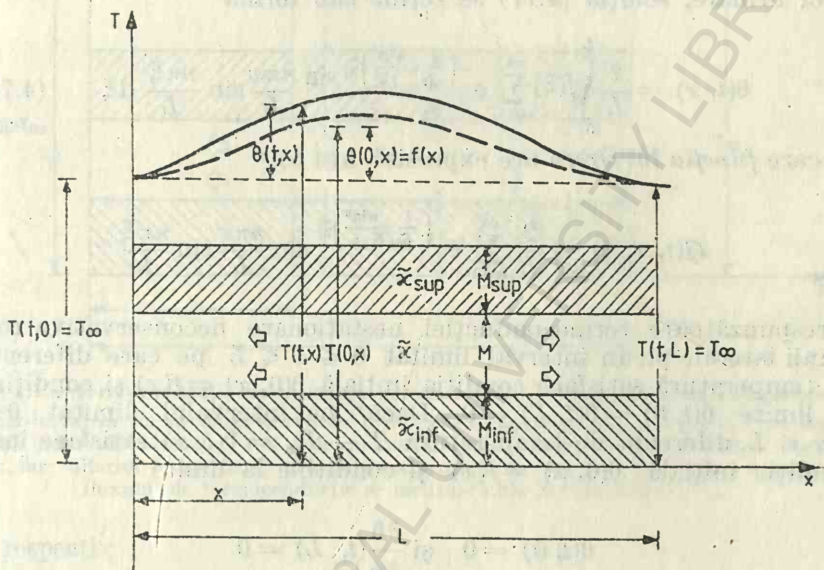


Fig. 4.11. Termoconducția nestaționară neconservativă rectilinie laterală caracterizată printr-un factor de neconservativitate $\tilde{B} = [\tilde{\varkappa} M/(\tilde{\varkappa}_{inf}/M_{inf} + \tilde{\varkappa}_{sup}/M_{sup})]^{1/2}$ constant pe un interval limitat de crustă terestră pe ale cărui frontiere temperatura se menține constantă

unde $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Însumînd aceste soluții particulare se găsește soluția

$$\theta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, e^{-\left(\frac{1}{\tilde{B}^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tilde{\varkappa} t} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (4.77)$$

care trebuie să satisfacă condiția inițială $\theta(0, x) = f(x)$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

unde $f(x)$ reprezintă o *funcție impară* cu *coeficienții Fourier*

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}\,d\xi.$$

Prin urmare, soluția (4.77) se reține sub forma

$$\theta(t, x) = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tilde{\chi}t}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\,d\xi \qquad (4.78)$$

în care *funcția lui Green* are expresia

$$\mathcal{G}(t, x, \xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tilde{\chi}t}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}$$

corespunzătoare termoconducției nestaționare neconservative rectilinii laterale pe un interval limitat $0 \leqslant x \leqslant L$ pe care diferența de temperatură satisface condiția inițială $\theta(0, x) = f(x)$ și condițiile la limite $\theta(t, 0) = \theta(t, L) = 0$. Dacă pe intervalul limitat $0 \leqslant x \leqslant L$, diferența de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface însă condiția inițială $\theta(0, x) = f(x)$ și condițiile la limite

$$\theta(t, 0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, L) = 0$$

(fig. 4.12), prin care din funcția (4.74) și din derivata sa parțială în raport cu x

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\lambda[A(\lambda)\sin\lambda x - B(\lambda)\cos\lambda x]\, e^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}$$

se deduce că $A = 0$ și $\lambda_n = (2n+1)\pi/(2L)$, atunci soluțiile particulare ale ecuației (4.8) și soluția sa generală se prezintă, conform cu (4.74), astfel:

$$\theta_n(t, x) = B_n\, e^{-\left[\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\right]\tilde{\chi}t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

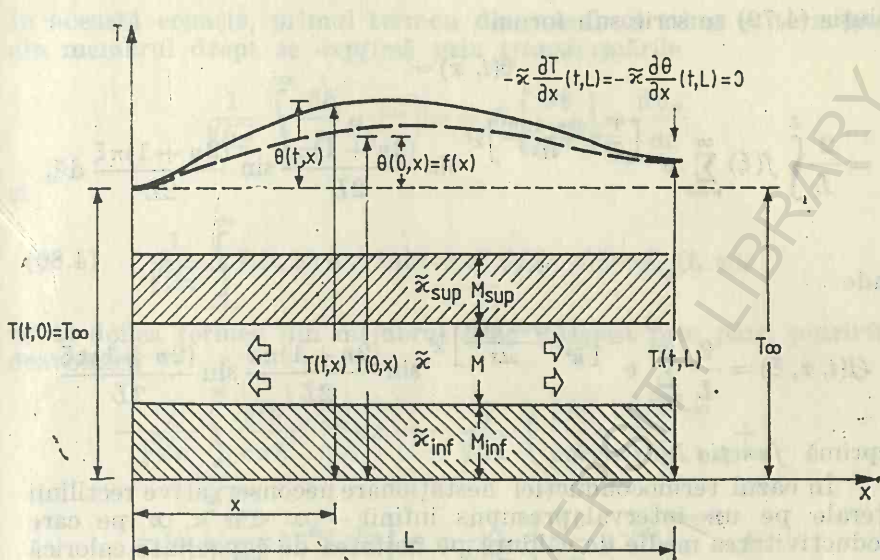


Fig. 4.12. Termoconducţia nestaţionară neconservativă rectilinie laterală caracterizată printr-un factor de neconservativitate $\tilde{B} = [\tilde{\varkappa}M/(\tilde{\varkappa}_{inf}/M_{inf}+\tilde{\varkappa}_{sup}/M_{sup})]^{1/2}$ constant pe un interval limitat $0 \leqslant x \leqslant L$ pe care iniţial temperatura este dată printr-o funcţie de x, iar ulterior temperatura se menţine constantă la frontiera $x = 0$ şi densitatea fluxului de termoconducţie se menţine nulă la frontiera $x = L$.

şi respectiv

$$\theta(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n(t, x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\mathrm{e}^{-\left[\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\right]\tilde{\chi}t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \quad (4.79)$$

Impunînd condiţia iniţială

$$\theta(0, x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}=f(x)$$

şi observînd că $f(x)$ reprezintă o *funcţie impară* cu *coeficienţii Fourier*

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2L}\mathrm{d}\xi,$$

soluţia (4.79) se scrie sub forma

$$\theta(t, x) =$$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\right]\tilde{\chi}t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2L}\, d\xi, \tag{4.80}$$

unde

$$\mathcal{G}(t, x, \xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{2L^2}\right]\tilde{\chi}t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2L}$$

exprimă *funcţia lui Green.*

În cazul termoconducţiei nestaţionare neconservative rectilinii laterale pe un interval presupus infinit $-\infty < x < \infty$ pe care productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică se conformează unei funcţii date $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} = f_x(t, x)$, iar diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$ şi condiţiile la limite $\lim_{x\to\pm\infty} \theta(t, x) = 0$ şi $\lim_{x\to\pm\infty} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0$ pentru $t \geqslant 0$, ecuaţia (4.73) preluată sub forma

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \tilde{\chi}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = f_x(t, x) \tag{4.81}$$

se poate integra prin intermediul *transformatei Fourier*

$$\theta_*(t, \omega) = \mathscr{F}[\theta(t, x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t, x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

prin care se obţine ecuaţia operaţională

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\theta}{\partial t}\, e^{-i\omega x}\, dx - \frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t, x)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

În această ecuaţie, primul termen din membrul stîng şi termenul din membrul drept se exprimă prin transformările

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\theta}{\partial t}\,e^{-i\omega x}\,dx=\mathscr{F}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]=\frac{d\theta_*}{dt}$$

şi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_x(t,x)\,e^{-i\omega x}\,dx=\mathscr{F}\,[f_x(t,x)]=f_{x_*}(t,\omega),$$

iar al doilea termen din membrul stîng integrat prin părţi potrivit dezvoltării

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}e^{-i\omega x}\,dx=-\frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\,e^{-i\omega x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}+\right.$$

$$\left.+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\theta}{\partial x}\,e^{-i\omega x}\,dx\right)=-\frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\,e^{-i\omega x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}+\right.$$

$$\left.+i\omega\left(\theta\,e^{-i\omega x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\theta\,e^{-i\omega x}\,dx\right)\right]$$

se prezintă, cu condiţiile $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\theta(t,x)\cdot e^{-i\omega x}]=0$ şi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{[\partial\theta(t,x)/\partial x]\cdot e^{-i\omega x}\}=0$, astfel:

$$-\frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\,e^{-i\omega x}\,dx=\frac{\omega^2\tilde{\chi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t,x)\,e^{-i\omega x}\,dx=\omega^2\tilde{\chi}\theta_*.$$

Reluînd ecuaţia operaţională sub forma

$$\frac{d\theta_*}{dt}+\omega^2\tilde{\chi}\theta_*=f_{x_*}(t,\omega) \tag{4.82}$$

şi efectuînd substituţia

$$\theta_*(t,\omega)=\theta_*^{I}(t,\omega)\cdot\theta_*^{II}(t,\omega)$$

prin care rezolvarea ecuaţiei (4.82) se reduce la rezolvarea ecuaţiilor

$$\frac{1}{\theta_*^{I}(t,\omega)}\,\frac{d\theta_*^{I}(t,\omega)}{dt}+\omega^2\tilde{\chi}=0$$

și

$$\frac{d\theta_*^{II}(\tau, \omega)}{d\tau} - \frac{f_{x_*}(\tau, \omega)}{\theta_*^{I}(\tau, \omega)} = 0$$

cu $0 \leqslant \tau \leqslant t$ și $\lim\limits_{\tau \to 0} \theta_*^{II}(\tau, \omega) = 0$, rezultă că

$$\theta_*^{I}(t, \omega) = \theta_*^{I}(0, \omega) \cdot e^{-\omega^2 \tilde{\chi} t},$$

$$\theta_*^{II}(t, \omega) = \frac{1}{\theta_*^{I}(0, \omega)} \int_0^t f_{x_*}(\tau, \omega) \cdot e^{\omega^2 \tilde{\chi} \tau}\, d\tau$$

și deci

$$\theta_*(t, \omega) = \int_0^t f_{x_*}(\tau, \omega) \cdot e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)}\, d\tau, \tag{4.83}$$

unde funcția $f_{x*}(\tau, \omega)$ are expresia

$$f_{x_*}(\tau, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(\tau, \xi) \cdot e^{-i\omega\xi}\, d\xi.$$

Prin aplicarea transformatei inverse

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_*(t, \omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega,$$

se găsește soluția

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_x(\tau, \xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cdot \frac{e^{i\omega(x-\xi)}}{2}\, d\omega$$

în care integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cdot \frac{e^{i\omega(x-\xi)}}{2}\, d\omega = \int_{-\infty}^{0} e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cdot \frac{e^{i\omega(x-\xi)}}{2}\, d\omega +$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cdot \frac{e^{i\omega(x-\xi)}}{2}\, d\omega = \int_0^{\infty} e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cdot \frac{e^{-i\omega(x-\xi)} + e^{i\omega(x-\xi)}}{2}\, d\omega =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cos \omega(x-\xi)\, d\omega$$

reprezintă *integrala lui Poisson*

$$\int_0^\infty e^{-\omega^2\tilde{\chi}(t-\tau)}\cos\omega(x-\xi)d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}},$$

astfel încît se conchide că

$$\theta(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f_x(\tau, \xi)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}}{\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}d\xi. \quad (4.84)$$

Dacă intervalul de integrare este semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ şi productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică se conformează unei funcţii date $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}} = f_x(t, x)$, iar diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$ şi condiţiile la limite $\lim\limits_{x\to 0}\theta(t, x) = \lim\limits_{x\to\infty}\theta(t, x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}[\partial\theta(t,x)/\partial x] = 0$, atunci pentru integrarea ecuaţiei (4.73) preluate sub forma (4.81) se poate recurge la *transformata Fourier prin sinus*

$$\theta_{*s}(t, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta(t, x)\sin\omega x\, dx.$$

Înmulţind ecuaţia (4.81) cu $\sqrt{2/\pi}\sin\omega x\, dx$ şi apoi integrînd-o pe intervalul $0 \leqslant x < \infty$, se obţine ecuaţia operaţională

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\omega x\, dx - \tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\omega x\, dx -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_x(t, x)\sin\omega x\, dx = 0$$

în care primul termen se exprimă conform transformării

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\omega x\, dx = \mathscr{F}_s\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = \frac{d\theta_{*s}}{dt},$$

al doilea termen preluat, potrivit formulei de integrare prin părţi, cu dezvoltarea

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\omega x\,\mathrm{d}x = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} -\right.$$

$$\left. -\,\omega\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right) = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} -\right.$$

$$\left. -\,\omega\left(\theta\cos\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \omega\int_0^\infty \theta\sin\omega x\,\mathrm{d}x\right)\right]$$

se prezintă, întrucît $\lim\limits_{x\to 0}\theta(t, x) = \lim\limits_{x\to\infty}\theta(t, x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}[\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0$, sub forma

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\omega x\,\mathrm{d}x = \omega^2\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta(t, x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x = \omega^2\tilde{\chi}\theta_{*s},$$

iar al treilea termen se reţine prin funcţia

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_x(t, x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x = \mathscr{F}_s[f_x(t, x)] = f_{x_{*s}}(t, \omega).$$

Urmează că ecuaţia operaţională este reprezentată prin ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{*s}}{\mathrm{d}t} + \omega^2\tilde{\chi}\theta_{*s} - f_{x_{*s}}(t, \omega) = 0 \qquad (4.85)$$

rezolvabilă prin substituţia

$$\theta_{*s}(t, \omega) = \theta^{\mathrm{I}}_{*s}(t, \omega)\cdot\theta^{\mathrm{II}}_{*s}(t, \omega)$$

prin care se obţine:

$$\frac{d\theta^{II}_{*s}}{dt}+\left(\frac{1}{\theta^{I}_{*s}}\frac{d\theta^{I}_{*s}}{dt}+\omega^2\tilde{\chi}\right)\theta^{II}_{*s}-\frac{f_{x*s}(t,\omega)}{\theta^{I}_{*s}}=0$$

sau

$$\frac{1}{\theta^{I}_{*s}(t,\omega)}\frac{d\theta^{I}_{*s}(t,\omega)}{dt}+\omega^2\tilde{\chi}=0 \quad \text{şi} \quad \frac{d\theta^{II}_{*s}(\tau,\omega)}{d\tau}-\frac{f_{x*s}(\tau,\omega)}{\theta^{I}_{*s}(\tau,\omega)}=0,$$

unde $0 \leqslant \tau \leqslant t$ şi, conform condiţiei iniţiale, $\lim\limits_{\tau\to 0} \theta^{II}_{*s}(\tau, \omega) = 0$. Deoarece aceste ultime ecuaţii diferenţiale au soluţiile

$$\theta^{I}_{*s}(t,\omega)=\theta^{I}_{*s}(0,\omega)\,e^{-\omega^2\tilde{\chi}t}$$

şi

$$\theta^{II}_{*s}(t,\omega)=\frac{1}{\theta^{I}_{*s}(0,\omega)}\int_0^t f_{x*s}(\tau,\omega)\,e^{\omega^2\tilde{\chi}\tau}\,d\tau,$$

se deduce că $\theta_{*s}(t,\omega)=\theta^{I}_{*s}(t,\omega)\cdot\theta^{II}_{*s}(t,\omega)$ are expresia

$$\theta_{*s}(t,\omega)=\int_0^t f_{x*s}(\tau,\omega)\,e^{-\omega^2\tilde{\chi}(t-\tau)}\,d\tau. \tag{4.86}$$

Reluînd funcţia $f_{x*s}(\tau,\omega)$ sub forma

$$f_{x*s}(\tau,\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_x(\tau,\xi)\sin\omega\xi\,d\xi$$

şi aplicînd *transformata prin sinus inversă*

$$\theta(t,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta_{*s}(t,\omega)\sin\omega x\,d\omega,$$

din (4.86) rezultă soluţia

$$\theta(t, x) = \frac{2}{\pi}\int_0^t d\tau \int_0^\infty f_x(\tau, \xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\omega^2\tilde{\chi}(t-\tau)} \sin \omega x \sin \omega\xi\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t d\tau \int_0^\infty f_x(\tau, \xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\omega^2\tilde{\chi}(t-\tau)} [\cos\omega(x - \xi) - \cos \omega(x + \xi)]\, d\omega. \tag{4.87}$$

Prin intermediul *integralei lui Poisson* conform căreia

$$\int_0^\infty e^{-\omega^2\tilde{\chi}(t-\tau)} [\cos \omega(x - \xi) - \cos \omega (x + \xi)]\, d\omega =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}\right],$$

soluţia (4.87) se mai scrie sub forma (Iordache şi Smigelschi, 1981)

$$\theta(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau \int_0^\infty f_x(\tau, \xi)\, \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}}{\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}\, d\xi. \tag{4.88}$$

Dacă pe intervalul de integrare semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ productivitatea medie de căldură pe unitarea de capacitate calorică se conformează unei funcţii date $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}} = f_x(t, x)$, iar diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$ şi condiţiile la limite $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(t, x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = \lim\limits_{x\to\infty} [\partial\theta(t, x)/\partial x] = 0$ pentru $t \geqslant 0$, atunci ecuaţia (4.73) reluată sub forma (4.81) se poate integra cu ajutorul *transformatei Fourier prin cosinus*

$$\theta_{*c}(t, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta(t, x) \cos \omega x\, dx$$

cu care se obţine ecuaţia operaţională

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\omega x\,\mathrm{d}x - \tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}x =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_x(t,x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x,$$

unde

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\omega x\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}_c\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = \frac{\mathrm{d}\theta_{*c}}{\mathrm{d}t},$$

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}x = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} +\right.$$

$$\left. + \omega\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x\right) = -\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} +\right.$$

$$\left. + \omega\left(\theta\sin\omega x\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \omega\int_0^\infty \theta\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right)\right]$$

sau, conform condiţiilor la limite,

$$-\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}x = \omega^2\tilde{\chi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \theta(t,x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x = \omega^2\tilde{\chi}\theta_{*c}$$

şi

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_x(t,x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x = f_{x_{*c}}(t,\omega).$$

Din ecuaţia operaţională preluată sub forma

$$\frac{d\theta_{*c}}{dt} + \omega^2\tilde{\chi}\theta_{*c} = f_{x*c}(t, \omega) \tag{4.89}$$

şi cu substituţia

$$\theta_{*c}(t, \omega) = \theta^{I}_{*c}(t, \omega) \cdot \theta^{II}_{*c}(t, \omega),$$

rezultă ecuaţiile

$$\frac{1}{\theta^{I}_{*c}(t, \omega)} \frac{d\theta^{I}_{*c}(t, \omega)}{dt} + \omega^2\tilde{\chi} = 0$$

şi

$$\frac{d\theta^{II}_{*c}(\tau, \omega)}{d\tau} - \frac{f_{x*c}(\tau, \omega)}{\theta^{I}_{*c}(\tau, \omega)} = 0$$

cu $0 \leqslant \tau \leqslant t$ şi cu condiţia iniţială $\lim\limits_{\tau\to 0} \theta^{II}_{*c}(\tau, \omega) = 0$, pentru care se deduc soluţiile

$$\theta^{I}_{*c}(t, \omega) = \theta^{I}_{*c}(0, \omega)\, e^{-\omega^2\tilde{\chi}t},$$

$$\theta^{II}_{*c}(t, \omega) = \frac{1}{\theta^{I}_{*c}(0, \omega)} \int_0^t f_{x*c}(\tau, \omega)\, e^{\omega^2\tilde{\chi}\tau}\, d\tau$$

şi deci

$$\theta_{*c}(t, \omega) = \int_0^t f_{x*c}(\tau, \omega)\, e^{-\omega^2\tilde{\chi}(t-\tau)}\, d\tau, \tag{4.90}$$

unde

$$f_{x*c}(\tau, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_x(\tau, \xi) \cos \omega\xi\, d\xi.$$

Aplicînd *teorema de inversiune a transformatei prin cosinus*

$$\theta(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta_{*c}(t, \omega) \cos \omega x\, d\omega$$

potrivit căreia

$$\theta(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty f_x(\tau, \xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} \cos \omega x \cos \omega \xi \, d\omega$$

şi ţinînd seamă că

$$2 \cos \omega x \cos \omega \xi = \cos \omega(x - \xi) + \cos \omega(x + \xi),$$

iar

$$\int_0^\infty e^{-\omega^2 \tilde{\chi}(t-\tau)} [\cos \omega(x - \xi) + \cos \omega(x + \xi)]\, d\omega =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} \right],$$

urmează că soluţia căutată este de forma (Iordache şi Smigelschi, 1981)

$$\theta(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^\infty f_x(\tau, \xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\tilde{\chi}(t-\tau)}}}{\sqrt{\tilde{\chi}(t-\tau)}}\, d\xi. \quad (4.91)$$

În cazul termoconducţiei nestaţionare neconservative rectilinii laterale pe un interval semiinfinit $0 \leqslant x < \infty$ pe care productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică este dată prin funcţia $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}} = - \tilde{\chi}\theta/\tilde{B}^2$, iar diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$ şi condiţia la limită $\theta(t, 0) = \theta_0 = const.$ pentru $t \geqslant 0$, ecuaţia (4.73) preluată sub forma (4.8) se poate integra prin intermediul *transformatei Laplace* prin care se găseşte ecuaţia operaţională

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt}\, dt - \int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} e^{-pt}\, dt = - \frac{1}{\tilde{B}^2} \int_0^\infty \theta\, e^{-pt}\, dt,$$

unde

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial t}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] = p\theta^*(p, x) - \theta(0, x),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 \theta^*}{\mathrm{d}x^2}$$

şi

$$\int_0^{\infty} \theta(t, x)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[\theta(t, x)\right] = \theta^*.$$

Ţinînd seamă de condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$, ecuaţia operaţională se prezintă sub forma

$$\left(\frac{1}{\tilde{B}^2} + \frac{p}{\tilde{\chi}}\right)\theta^* - \frac{\mathrm{d}^2 \theta^*}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad (4.92)$$

cu condiţia la limită

$$\theta^*(p, 0) = \int_0^{\infty} \theta(t, 0)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}p = \mathcal{L}\left[\theta(t, 0)\right] = \mathcal{L}\left[\theta_0\right] = \theta_0 \mathcal{L}\left[1\right]$$

sau, potrivit transformării 13 din tabelul 4.2,

$$\theta^*(p, 0) = \frac{\theta_0}{p}.$$

Din soluţia generală a ecuaţiei (4.92)

$$\theta^*(p, x) = C_1\, \mathrm{e}^{x\sqrt{1/\tilde{B}^2 + p/\tilde{\chi}}} + C_2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{1/\tilde{B}^2 + p/\tilde{\chi}}}$$

care trebuie să satisfacă condiţiile de a fi finită pentru $x \to \infty$ şi egală cu θ_0/p pentru $x \to 0$, se deduce că $C_1 = 0$, $C_2 = \theta_0/p$ şi deci

$$\theta^*(p, x) = \frac{\theta_0}{p}\, \mathrm{e}^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{(\tilde{\chi}/\tilde{B}^2) + p}}. \qquad (4.93)$$

Întrucît funcţiilor « imagine » $e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}}$ şi $e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{(\tilde{\chi}/\tilde{B}^2)+p}}$ le corespund, potrivit transformărilor 30 şi 3 din tabelul 4.2, funcţiile « original »

$$\frac{(x/\sqrt{\tilde{\chi}})}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-\frac{(x/\sqrt{\tilde{\chi}})^2}{4t}} = \frac{x}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}}$$

şi respectiv

$$e^{-(\tilde{\chi}/\tilde{B}^2)t}\cdot\frac{x}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}} = \frac{x}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t^3}}\,e^{-\left(\frac{\tilde{\chi}t}{\tilde{B}^2}+\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}\right)}$$

pentru $(x/\sqrt{\tilde{\chi}}) > 0$, urmează că funcţiei « imagine »

$$\frac{1}{p}\,e^{-(x/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{(\tilde{\chi}/\tilde{B}^2)+p}}$$

îi corespunde, conform integralei originalului prezentată prin transformarea 8 din tabelul 4.2, funcţia « original »

$$\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t^3}}\,e^{-\left(\frac{\tilde{\chi}t}{\tilde{B}^2}+\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}\right)}dt,$$

iar soluţia $\theta(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p, x)]$ se exprimă în definitiv sub forma

$$\theta(t, x) = \theta_0\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\tilde{\chi}t^3}}\,e^{-\left(\frac{\tilde{\chi}t}{\tilde{B}^2}+\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}\right)}dt. \qquad (4.94)$$

Dacă intervalul de integrare este limitat la $0 \leqslant x \leqslant L$ şi productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică se conformează unei funcţii date $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}} = f_x(t, x)$, iar diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, x)$ satisface condiţia iniţială $\theta(0, x) = 0$ şi condiţiile la limite $\theta(t, 0) = \theta(t, L) =$ pentru $t \geqslant 0$, atunci ecuaţia (4.73) preluată prin (4.81) sub forma

$$\frac{\partial\theta}{\partial(\tilde{\chi}\,t)} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\tilde{\chi}}\,f_x(\tilde{\chi}t, x) \qquad (4.95)$$

se poate integra aplicînd *transformata Laplace*

$$\int_0^\infty \theta(\tilde{\chi}t, x)\, e^{-p(\tilde{\chi}t)}\, d(\tilde{\chi}t) = \mathcal{L}[\theta(\tilde{\chi}t, x)] = \theta^*(p, x)$$

cu care se obține:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial(\tilde{\chi}\, t)}\, e^{-p(\tilde{\chi}t)} d(\tilde{\chi}t) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial(\tilde{\chi}t)}\right] = p\theta^*(p, x) - \theta(0, x),$$

unde $\theta(0, x) = 0$ prin condiția inițială,

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\, e^{-p(\tilde{\chi}t)}\, d(\tilde{\chi}t) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2\theta^*}{dx^2},$$

$$\int_0^\infty f_x(\tilde{\chi}t, x)\, e^{-p(\tilde{\chi}t)}\, d(\tilde{\chi}t) = \mathcal{L}[f_x(\tilde{\chi}t, x)] = f_x^*(p, x)$$

și deci

$$p\theta^* - \frac{d^2\theta^*}{dx^2} = \frac{1}{\tilde{\chi}} f_x^*(p, x). \tag{4.96}$$

Pentru ecuația operațională (4.96) cu condițiile la limite $\theta^*(p, 0) = \theta^*(p, L) = 0$, *funcția lui Green* este de forma (Ditkine și Proudnikov, 1978)

$$\mathcal{G}^*(p, x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[(L - \xi)\sqrt{p}]\, \operatorname{sh}(x\sqrt{p})}{\sqrt{p}\, \operatorname{sh}(L\sqrt{p})} & \text{pentru } x \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}[(L - x)\sqrt{p}] \cdot \operatorname{sh}(\xi\sqrt{p})}{\sqrt{p}\, \operatorname{sh}(L\sqrt{p})} & \text{pentru } x \geqslant \xi \end{cases}$$

și soluția se prezintă astfel:

$$\theta^*(p, x) = \frac{1}{\tilde{\chi}} \int_0^L f_x^*(p, x)\, \mathcal{G}^*(p, x, \xi)\, d\xi. \tag{4.97}$$

Ţinînd seamă că funcţiei « imagine » $\mathcal{G}^*(p, x, \xi)$ îi corespunde, potrivit transformării 35 din tabelul 4.2 în care variabila t se substituie prin $(\tilde{\chi}t)$, funcţia « original »

$$\mathcal{G}(\tilde{\chi}t, x, \xi) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\tilde{\chi}t)} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi\xi}{L}$$

şi că respectiv funcţiei $\theta^*(p, x)$ cu expresia (4.96) îi corespunde (Ditkine şi Proudnikov, 1978) transformata inversă

$$\theta(\tilde{\chi}t, x) = \mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p, x)] = \int_0^L d\xi \int_0^{\tilde{\chi}t} \frac{1}{\tilde{\chi}} f_x(\tilde{\chi}\tau, \xi)\mathcal{G}(\tilde{\chi}t - \tilde{\chi}\tau, x, \xi)\, d(\tilde{\chi}\tau),$$

rezultă că

$$\theta(\tilde{\chi}t, x) = \frac{2}{\tilde{\chi}L} \int_0^L d\xi \int_0^{\tilde{\chi}t} f_x(\tilde{\chi}\tau, \xi) \times$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\tilde{\chi}t - \tilde{\chi}\tau)} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi\xi}{L}\right] d(\tilde{\chi}\tau). \tag{4.98}$$

Prin aplicarea formulei

$$2\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L} = \cos\frac{n\pi(x-\xi)}{L} - \cos\frac{n\pi(x+\xi)}{L}$$

şi revenirea de la variabila $(\tilde{\chi}t)$ la t, soluţia (4.98) se exprimă în definitiv sub forma

$$\theta(t, x) = \frac{1}{L}\int_0^L d\xi \int_0^t f_x(\tau, \xi) \left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\tilde{\chi}(t-\tau)} \times\right.$$

$$\left.\times \left[\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{L} - \cos\frac{n\pi(x+\xi)}{L}\right]\right\} d\tau. \tag{4.99}$$

În cazul termoconducţiei nestaţionare neconservative rectilinii verticale pe un interval limitat $0 \leqslant z \leqslant M$ pe care productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică se conformează unei funcţii date $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}} = f_z(t, z)$, ecuaţia (4.73′) se prezintă sub forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \tilde{\chi}\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f_z(t, z). \tag{4.100}$$

Prin intermediul *transformatei Fourier* sau *Laplace*, din ecuaţia (4.100) se obţine, similar cu (4.82), (4.85) şi (4.89) sau respectiv cu (4.96), a ecuaţie operaţională neomogenă de forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_*(t, \omega) + \omega^2 \tilde{\chi}\, T_*(t, \omega) = f_{z_*}(t, \omega) \tag{4.101}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} T^*(p, z) - p\,T^*(p, z) = -\frac{1}{\tilde{\chi}} f_z^*(p, z) \tag{4.102}$$

care se dezvoltă în *serie Fourier generalizată* prin funcţiile

$$T_*(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_{*n}(t, \omega) \text{ şi } f_{z_*}(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_{*n}(t, \omega) \tag{4.103}$$

sau

$$T^*(p, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n^*(p, z) \text{ şi } f_z^*(p, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n^*(p, z), \tag{4.104}$$

unde funcţiile proprii T_{*n} sau T_n^* şi coeficienţii reprezentaţi prin *valorile proprii* $\omega_n^2\tilde{\chi}$ sau p_n satisfac respectiv ecuaţia omogenă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_{*n}(t, \omega) + \omega_n^2 \tilde{\chi}\, T_{*n}(t, \omega) = 0 \tag{4.105}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} T_n^*(p, z) - p_n T_n^*(p, z) = 0. \tag{4.106}$$

Ca urmare, utilizînd substituţiile

$$\frac{d}{dt} T_*(t, \omega) = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_{*n}(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{d}{dt} T_{*n}(t, \omega) =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \omega_n^2 \tilde{\chi} T_{*n}(t, \omega)$$

sau

$$\frac{d^2}{dx^2} T^*(p, z) = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n^*(p, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{d^2}{dx^2} T_n^*(p, z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n p_n T_n^*(p, z)$$

şi

$$\omega^2 \tilde{\chi} T_*(t, \omega) = \omega^2 \tilde{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_{*n}(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \omega^2 \tilde{\chi} T_{*n}(t, \omega)$$

sau

$$- p T^*(p, z) = - p \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n^*(p, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} C_n p T_n^*(p, z),$$

ecuaţia (4.101) sau (4.102) devine respectiv :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\omega^2 - \omega_n^2) \tilde{\chi} T_{*n}(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_{*n}(t, \omega) \qquad (4.107)$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(p - p_n) T_n^*(p, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\tilde{\chi}} T_n^*(p, z). \qquad (4.108)$$

Întrucît funcţiile proprii $T_{*n}(t, \omega)$ sau $T_n^*(p, z)$ sînt respectiv liniar independente, rezultă că $C_n(\omega^2 - \omega_n^2) \tilde{\chi} = c_n$ sau $C_n(p - p_n) = c_n / \tilde{\chi}$ şi deci

$$C_n = \frac{c_n}{(\omega^2 - \omega_n^2) \tilde{\chi}} \qquad (4.109)$$

sau

$$C_n = \frac{c_n}{(p - p_n)\tilde{\chi}} \cdot \tag{4.110}$$

Coeficienţii Fourier generalizaţi c_n se determină (Sabac, 1965) cu formula

$$c_n = \int_0^t T_{**n}(\tau, \omega) f_{z_*}(\tau, \omega)\, d\tau \tag{4.111}$$

sau

$$c_n = \int_0^M T_n^{**}(p, \zeta) \cdot f_z^*(p, \zeta) \cdot d\zeta \tag{4.112}$$

şi coeficienţii C_n se prezintă respectiv, potrivit relaţiei (4.109) sau (4.110), cu expresia

$$C_n = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_n^2)\tilde{\chi}} \int_0^t T_{**n}(\tau, \omega) f_{z_*}(\tau, \omega)\, d\tau \tag{4.113}$$

sau

$$C_n = \frac{1}{(p - p_n)\tilde{\chi}} \int_0^M T_n^{**}(p, \zeta) f_z^*(p, \zeta)\, d\zeta. \tag{4.114}$$

cu care prima funcţie din (4.103) sau (4.104) se aduce la forma

$$T_*(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{*n}(t, \omega)}{(\omega^2 - \omega_n^2)\tilde{\chi}} \int_0^t T_{**n}(\tau, \omega) f_{z_*}(\tau, \omega)\, d\tau \tag{4.115}$$

sau

$$T^*(p, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n^*(p, z)}{(p - p_n)\tilde{\chi}} \int_0^M T_n^{**}(p, \zeta) f_z^*(p, \zeta)\, d\zeta. \tag{4.116}$$

Această soluţie a ecuaţiei neomogene (4.101) sau (4.102) se mai poate reţine sub forma

$$T_*(t, \omega) = \int_0^t f_{z_*}(\tau, \omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{*n}(t, \omega) T_{**n}(\tau, \omega)}{(\omega^2 - \omega_n^2)\tilde{\chi}} \mathrm{d}\tau$$

sau

$$T^*(p, z) = \int_0^M f_z^*(p, \zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n^*(p, z) T_n^{**}(p, \zeta)}{(p - p_n)\tilde{\chi}} \mathrm{d}\zeta$$

şi încă

$$T_*(t, \omega) = \int_0^t f_{z_*}(\tau, \omega) \mathcal{G}_*(t, \tau, \omega) \, \mathrm{d}\tau \tag{4.117}$$

sau

$$T^*(p, z) = \int_0^M f_z^*(p, \zeta) \mathcal{G}^*(p, z, \zeta) \, \mathrm{d}\zeta, \tag{4.118}$$

unde este evidenţiată *funcţia lui Green*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{*n}(t, \omega) T_{**n}(\tau, \omega)}{(\omega^2 - \omega_n^2)\tilde{\chi}} = \mathcal{G}_*(t, \tau, \omega) \tag{4.119}$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n^*(p, z) T_n^{**}(p, \zeta)}{(p - p_n)\tilde{\chi}} = \mathcal{G}^*(p, z, \zeta) \tag{4.120}$$

care are proprietatea

$$\mathcal{G}_*(t, \tau, \omega) = \mathcal{G}_{**}(\tau, t, \omega) \tag{4.121}$$

sau

$$\mathcal{G}^*(p, z, \zeta) = \mathcal{G}^{**}(p, \zeta, z) \tag{4.122}$$

şi se determină prin condiţiile la limite date. Din aplicarea transformatei inverse rezultă că soluţia ecuaţiei (4.100) este de forma

$$T(t, z) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^M f_z(\tau, \zeta) \, \mathcal{G}(t - \tau, z, \zeta) \, \mathrm{d}\zeta \tag{4.123}$$

pentru condiţii iniţiale omogene şi

$$T(t, z) = \int_0^M f(\zeta)\, \mathcal{G}(t, z, \zeta)\, d\zeta + \int_0^t d\tau \int_0^M f_z(\tau, \zeta)\, \mathcal{G}(t-\tau, z, \zeta)\, d\zeta \qquad (4.124)$$

pentru condiţii iniţiale neomogene $T(0, z) = f(z)$.

4.6. Aplicaţii

4.6.1. În condiţiile termoconducţiei rectilinii staţionare conservative, să se calculeze densitatea fluxului de termoconducţie verticală printr-o succesiune de trei complexe stratiforme orizontale cu grosimi de 300 m, 500 m, 700 m şi respectiv cu conductibilităţi termice de 2,51 W/m. °K, 2,28 W/m. °K, 1,83 W/m. °K, ştiind că temperatura în culcuşul complexului inferior şi în acoperişul complexului superior are valorile constante de 336°K şi respectiv de 282°K.

Rezolvare. Prin intermediul relaţiei (4.17′) în care $(n) = \text{III}$, $M_{\text{I}} = 300$ m, $M_{\text{II}} = 500$ m, $M_{\text{III}} = 700$ m, $\tilde{\varkappa}_{\text{I}} = 2{,}51$ W/m · °K, $\tilde{\varkappa}_{\text{II}} = 2{,}28$ W/m · °K, $\tilde{\varkappa}_{\text{III}} = 1{,}83$ W/m · °K, $T_1 = 336$°K şi $T_2 = 282$°K, se găseşte că densitatea fluxului de termoconducţie verticală prin succesiunea celor trei complexe stratiforme orizontale are valoarea

$$\tilde{q}_z = \frac{336 - 282}{\dfrac{300}{2{,}51} + \dfrac{500}{2{,}28} + \dfrac{700}{1{,}83}} = 0{,}07486\, \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

4.6.2. Un dyke tabular vertical străpunge discordant o succesiune de strate orizontale cu grosimi de 5 m, 3 m, 4 m, 6 m şi respectiv cu conductibilităţi termice de 3,0 W/m · °K, 3,2 W/m · °K, 2,6 W/m · °K şi 2,1 W/m · °K. Presupunînd că termoconducţia laterală dinspre dyke este staţionară conservativă şi cunoscînd că pe un interval dat de 200 m influenţa sa termică scade de la 88,7 °K la 73,5°K, să se evalueze conductibilitatea termică medie a succesiunii de strate şi densitatea fluxului de termoconducţie prin această succesiune.

Rezolvare. Potrivit formulei (4.24) în care $(n) = \text{IV}$, $M_{\text{I}} = 5$ m, $M_{\text{II}} = 3$ m, $M_{\text{III}} = 4$ m, $M_{\text{IV}} = 6$ m, $\tilde{\varkappa}_{\text{I}} = 3{,}0$ W/m · °K, $\tilde{\varkappa}_{\text{II}} =$

$= 3{,}2$ W/m · °K, $\tilde{\varkappa}_{III} = 2{,}6$ W/m · °K, $\tilde{\varkappa}_{IV} = 2{,}1$ W/m · °K și $M =$ $= M_I + M_{II} + M_{III} + M_{IV} = 18$ m, se evaluează mai întîi conductibilitatea termică medie

$$\tilde{\varkappa}_{med_{||}} = \frac{5 \cdot 3{,}0 + 3 \cdot 3{,}2 + 4 \cdot 2.6 + 6 \cdot 2{,}1}{18} = 2{,}64444 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot {}^\circ\text{K}}.$$

Aplicînd apoi formula (4.23′) preluată sub forma

$$\tilde{q}_x = \tilde{\varkappa}_{med_{||}} \frac{T_1 - T_2}{L} = \tilde{\varkappa}_{med_{||}} \frac{\theta_1 - \theta_2}{L},$$

unde $\theta_1 = 88{,}7$°K și $\theta_2 = 73{,}5$°K, rezultă că

$$\tilde{q}_x = 2{,}64444 \frac{88{,}7 - 73{,}5}{200} = 0{,}20098 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

4.6.3. Într-o sondă prin care se investighează un corp granodioritic omogen cu conductibilitate termică de 2,5 W/m · °K și cu productivitate medie de căldură datorită surselor interioare uniform distribuită pe verticală, temperatura la adîncimea de 0 m, 2000 m și 6000 m este respectiv de 282°K, 362°K și 460°K. Să se calculeze productivitatea medie presupusă constantă de căldură a unității de volum, temperatura la adîncimea de 4 000 m și densitatea fluxului de termoconducție verticală la adîncimea de 6 000 m, 3 000 m și 0 m.

Rezolvare. Se consideră că axa verticală Oz are originea la adîncimea de 6 000 m și deci că $M = 6\,000$ m, $T_0 = 460$°K și $T_M = 282$°K, astfel încît, potrivit formulei (4.34′) în care $z = 6\,000 -$ $- 2\,000 = 4\,000$ m și $T = 362$°K, se obține pentru productivitatea medie de căldură a unității de volum valoarea

$$\tilde{\mu} = 2 \cdot 2{,}5 \left[\frac{460 - 282}{6\,000(6\,000 - 4\,000)} + \frac{362 - 460}{4\,000(6\,000 - 4\,000)} \right] =$$

$$= 1{,}29167 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^3}.$$

Aplicînd formula (4.35′) pentru $z = 6\,000 - 4\,000 = 2\,000$ m, se găsește că temperatura la adîncimea de 4 000 m are valoarea

$$T = 460 - \frac{2\,000}{6\,000}(460 - 282) +$$

$$+ \frac{1{,}29167 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2{,}5} 2\,000(6\,000 - 2\,000) = 421{,}33339\ {}^\circ\text{K}.$$

La adîncimea de 6 000 m, 3 000 m şi 0 m corespunzătoare cotei relative z de 0 m, 3000 m şi 6 000 m, densitatea fluxului de termoconducţie verticală se evaluează, conform cu (4.31′), (4.32′) şi (4.33′), astfel :

$$\tilde{q}_0 = \frac{2{,}5}{6\ 000}(460-282) - \frac{1{,}29167 \cdot 10^{-5}}{2} 6\ 000 = 0{,}03542 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2},$$

$$\tilde{q}_z = \frac{2{,}5}{6\ 000}(460-282) - 1{,}29167 \cdot 10^{-5}\left(\frac{6\ 000}{2} - 3\ 000\right) =$$

$$= 0{,}07417 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

şi

$$\tilde{q}_M = \frac{2{,}5}{6\ 000}(460-282) + \frac{1{,}29167 \cdot 10^{-5}}{2} \cdot 6\ 000 = 0{,}11292 \frac{W}{\mathrm{m}^2}.$$

4.6.4. În condiţiile termoconducţiei nestaţionare conservative rectilinii laterale dintr-o dyke tabular vertical într-un strat orizontal omogen şi izotrop presupus semiinfinit în care temperatura este iniţial constantă şi ulterior variabilă dinspre dyke unde se întreţine o creştere a temperaturii de 800°K spre infinit unde se menţine o creştere nulă a temperaturii, după 2 ani de la începerea încălzirii laterale a stratului la distanţa de 10 m faţă dyke se înregistrează o valoare a creşterii temperaturii de 316,88°K. Să se determine coeficientul de difuzivitate termică, distanţa faţă de dyke la care creşterea temperaturii are valoarea de 162,48°K după 2 ani de la începerea încălzirii laterale a stratului şi timpul necesar pentru ca la această distanţă creşterea temperaturii să atingă valoarea de 316,88°K.

Rezolvare. Prin intermediul soluţiei (4.65) reluate sub forma

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right) = \frac{\theta}{\theta_0}$$

cu $x = 10$ m, $t = 2 \cdot 365{,}25 \cdot 86400 = 6{,}31152 \cdot 10^7$ s, $\theta_0 = 800{,}00$°K şi $\theta = 316{,}88$°K, se obţine pentru complementara funcţiei erorilor valoarea

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{10}{2\sqrt{\chi \cdot 6{,}31152 \cdot 10^7}}\right) = \frac{316{,}88}{800{,}00} = 0{,}3961$$

Tabelul 4.3.

Valorile uzuale ale funcţiei erorilor şi complementarei sale (după Tables of Probability Functions, vol. I, 1941 ; Worthing şi Geffner, 1955)

$\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}$	$\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}\right)$	$\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}\right)$	$\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}$	$\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}\right)$	$\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}\right)$
1	2	3	4	5	6
0,00	0,0000	1,0000	0,43	0,4569	0,5431
0,01	0,0113	0,9887	0,44	0,4662	0,5338
0,02	0,0226	0,9774	0,45	0,4755	0,5245
0,03	0,0338	0,9662	0,46	0,4847	0,5153
0,04	0,0451	0,9549	0,47	0,4937	0,5063
0,05	0,0564	0,9436	0,48	0,5027	0,4973
0,06	0,0676	0,9324	0,49	0,5117	0,4883
0,07	0,0789	0,9211	0,50	0,5205	0,4795
0,08	0,0901	0,9099	0,51	0,5292	0,4708
0,09	0,1013	0,8987	0,52	0,5379	0,4621
0,10	0,1125	0,8875	0,53	0,5465	0,4535
0,11	0,1236	0,8764	0,54	0,5549	0,4451
0,12	0,1348	0,8652	0,55	0,5633	0,4367
0,13	0,1459	0,8541	0,56	0,5716	0,4284
0,14	0,1569	0,8431	0,57	0,5798	0,4202
0,15	0,1680	0,8320	0,58	0,5879	0,4121
0,16	0,1790	0,8210	0,59	0,5959	0,4041
0,17	0,1900	0,8100	0,60	0,6039	0,3961
0,18	0,2009	0,7991	0,61	0,6117	0,3883
0,19	0,2118	0,7882	0,62	0,6194	0,3806
0,20	0,2227	0,7773	0,63	0,6270	0,3730
0,21	0,2335	0,7665	0,64	0,6346	0,3654
0,22	0,2443	0,7557	0,65	0,6420	0,3580
0,23	0,2550	0,7450	0,66	0,6494	0,3506
0,24	0,2657	0,7343	0,67	0,6566	0,3434
0,25	0,2763	0,7237	0,68	0,6638	0,3362
0,26	0,2869	0,7131	0,69	0,6708	0,3292
0,27	0,2974	0,7026	0,70	0,6778	0,3222
0,28	0,3079	0,6921	0,71	0,6847	0,3153
0,29	0,3183	0,6817	0,72	0,6914	0,3086
0,30	0,3286	0,6714	0,73	0,6981	0,3019
0,31	0,3389	0,6611	0,74	0,7047	0,2953
0,32	0,3491	0,6509	0,75	0,7112	0,2888
0,33	0,3593	0,6407	0,76	0,7175	0,2825
0,34	0,3694	0,6306	0 77	0,7238	0,2762
0,35	0,3794	0,6206	0,78	0,7300	0,2700
0,36	0,3893	0 6107	0,79	0,7361	0,2639
0,37	0,3992	0,6008	0,80	0,7421	0,2579
0,38	0,4090	0,5910	0,81	0,7480	0,2520
0,39	0,4187	0,5813	0,82	0,7538	0,2462
0,40	0,4284	0,5716	0,83	0,7595	0,2405
0,41	0,4380	0,5620	0,84	0,7651	0,2349
0,42	0,4475	0,5525	0,85	0,7707	0,2293

(continuare tabel 4.3)

1	2	3	4	5	6
0,86	0,7761	0,2239	1,35	0,9438	0,0562
0,87	0,7814	0,2186	1,36	0,9456	0,0544
0,88	0,7867	0,2133	1,37	0,9473	0,0527
0,89	0,7918	0,2082	1,38	0,9490	0,0510
0,90	0,7969	0,2031	1,39	0,9507	0,0493
0,91	0,8019	0,1981	1,40	0,9523	0,0477
0,92	0,8068	0,1932	1,41	0,9539	0,0461
0,93	0,8116	0,1884	1,42	0,9554	0,0446
0,94	0,8163	0,1837	1,43	0,9569	0,0431
0,95	0,8209	0,1791	1,44	0,9583	0,0417
0,96	0,8254	0,1746	1,45	0,9597	0,0403
0,97	0,8299	0,1701	1,46	0,9611	0,0389
0,98	0,8342	0,1658	1,47	0,9624	0,0376
0,99	0,8385	0,1615	1,48	0,9637	0,0363
1,00	0,8427	0,1573	1,49	0,9649	0,0351
1,01	0,8468	0,1532	1,50	0,9661	0,0339
1,02	0,8508	0,1492	1,51	0,9673	0,0327
1,03	0,8548	0,1452	1,52	0,9684	0,0316
1,04	0,8586	0,1414	1,53	0,9695	0,0305
1,05	0,8624	0,1376	1,54	0,9706	0,0294
1,06	0,8661	0,1339	1,55	0,9716	0,0284
1,07	0,8698	0,1302	1,56	0,9726	0,0274
1,08	0,8733	0,1267	1,57	0,9736	0,0264
1,09	0,8768	0,1232	1,58	0,9745	0,0255
1,10	0,8802	0,1198	1,59	0,9755	0,0245
1,11	0,8835	0,1165	1,60	0,9763	0,0237
1,12	0,8868	0,1132	1,61	0,9772	0,0228
1,13	0,8900	0,1100	1,62	0,9780	0,0220
1,14	0,8931	0,1069	1,63	0,9788	0,0212
1,15	0,8961	0,1039	1,64	0,9796	0,0204
1,16	0,8991	0,1009	1,65	0,9804	0,0196
1,17	0,9020	0,0980	1,66	0,9811	0,0189
1,18	0,9048	0,0952	1,67	0,9818	0,0182
1,19	0,9076	0,0924	1,68	0,9825	0,0175
1,20	0,9103	0,0897	1,69	0,9832	0,0168
1,21	0,9130	0,0870	1,70	0,9838	0,0162
1,22	0,9155	0,0845	1,71	0,9844	0,0156
1,23	0,9181	0,0819	1,72	0,9850	0,0150
1,24	0,9205	0,0795	1,73	0,9856	0,0144
1,25	0,9229	0,0771	1,74	0,9861	0,0139
1,26	0,9252	0,0748	1,75	0,9867	0,0133
1,27	0,9275	0,0725	1,76	0,9872	0,0128
1,28	0,9297	0,0703	1,77	0,9877	0,0123
1,29	0,9319	0,0681	1,78	0,9882	0,0118
1,30	0,9340	0,0660	1,79	0,9886	0,0114
1,31	0,9361	0,0639	1,80	0,9891	0,0109
1,32	0,9381	0,0619	1,81	0,9895	0,0105
1,33	0,9400	0,0600	1,82	0,9899	0,0101
1,34	0,9419	0,0581	1,83	0,9903	0,0097

(continuare tabel 4.3)

1	2	3	4	5	6
1,84	0,9907	0,0093	1,98	0,9949	0,0051
1,85	0,9911	0,0089	1,99	0,9951	0,0049
1,86	0,9915	0,0085	2,00	0,9953	0,0047
1,87	0,9918	0,0082	2,10	0,9970	0,0030
1,88	0,9922	0,0078	2,20	0,9981	0,0019
1,89	0,9925	0,0075	2,30	0,9989	0,0011
1,90	0,9928	0,0072	2,40	0,9993	0,0007
1,91	0,9931	0,0069	2,50	0,9996	0,0004
1,92	0,9934	0,0066	2,60	0,9998	0,0002
1,93	0,9937	0,0063	2,70	0,9999	0,0001
1,94	0,9939	0,0061	2,80	0,9999	0,0001
1,95	0,9942	0,0058	2,90	0,99995	0,00005
1,96	0,9944	0,0056	∞	1,00000	0,00000
1,97	0,9947	0,0053			

căreia îi corespunde, potrivit tabelului 4.3, un argument cu valoarea

$$\frac{10}{2\sqrt{\tilde{\chi}\cdot 6{,}31152\cdot 10^7}}=0{,}60,$$

de unde se găsește că

$$\tilde{\chi}=1{,}10028\cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}.$$

Recurgînd la aceeași soluție (4.65) aplicată, pentru $\tilde{\chi}=1{,}10028\cdot 10^{-6}$ m²/s, $t = 6{,}31152\cdot 10^7$ s, $\theta_0 = 800{,}00°K$ și $\theta = 162{,}48°K$, sub forma

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{1{,}10028\cdot 10^{-6}\cdot 6{,}31152\cdot 10^7}}\right)=\frac{162{,}48}{800{,}00}=0{,}2031,$$

se deduce, potrivit tabelului 4.3, că

$$\frac{x}{2\sqrt{1{,}10028\cdot 10^{-6}\cdot 6{,}31152\cdot 10^7}}=0{,}90$$

și deci

$$x\approx 15\ \text{m}.$$

Din aceeași soluție (4.65) reluată, pentru $x = 15$ m, $\tilde{\chi} = 1{,}10028\cdot 10^{-6}$ m²/s, $\theta_0 = 800{,}00°K$ și $\theta = 316{,}88°K$, sub forma

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{15}{2\sqrt{1{,}10028\cdot 10^{-6}\cdot t}}\right)=\frac{316{,}88}{800{,}00}=0{,}3961,$$

rezultă că

$$\frac{15}{2\sqrt{1,10028 \cdot 10^{-6} \cdot t}} = 0,60$$

şi

$$t = 1,420093 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 4,5 \text{ ani.}$$

4.6.5. Un dyke este delimitat printr-un plan vertical faţă de o rocă omogenă cu conductibilitate termică de 2,8 W/m · °K şi difuzivitate termică de $1,21 \cdot 10^{-6}$ m²/s. La adîncimea de 700 m într-o lucrare minieră situată la 100 m de dyke se înregistrează, în curs de un secol, o creştere a temperaturii de la 310 °K la 315,88°K. Să se calculeze densitatea presupusă constantă a fluxului de termoconducţie prin planul vertical care delimitează acest dyke.

Rezolvare. Potrivit formulei (4.68) preluată sub forma

$$\tilde{q}_0 = \frac{\tilde{\varkappa} \cdot \theta(t,x)}{\sqrt{\tilde{\chi}}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\chi}t}} - \frac{x}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right]}$$

în care

$\tilde{\varkappa} = 2,8$ W/m · °K, $\tilde{\chi} = 1,21 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $t = 100 \cdot 365,25 \cdot 86\,400 =$ $= 3,15576 \cdot 10^9$ s, $x = 100$ m şi $\theta(t, x) = 315,88 - 310,00 = 5,88$°K,

rezultă că

$$\tilde{q}_0 = 1,5 \text{ W/m}^2.$$

Bibliografie

BOCHNER, S. (1932). *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Akad. Verl. Leipzig.

BOCHNER, S., CHANDRASEKARAN, K. C. (1949). *Fourier Transforms*, Princeton Univ. Press.

CAMPBELL, G., FOSTER, R. (1948). *Fourier integral for practical applications*, van Nostrand, New York.

CARLEMAN, T. (1944). *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Uppsala.

CARLSRAW, G., JAEGER, D. (1964). *Thermal Conductivity of Solid Bodies*, p. 104, Nauka, Moscow.

CARSLAW, H. (1959). *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press,

DAVIDESCU, AL. (1965). În: Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. VII, 8, p. 1285—1301, Editura tehnică, București.
DITKINE V., PROUDNIKOV, A. (1978). *Transformations intégrales et calcul opérationnel*, Chap. I, II, p. 11—65, Chap. V. p. 82—142, Chap. IX, p. 306—353, Éditions Mir, Moscou.
GHEORGHIU, GH. TH. (1965). În: Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. III, 3, p. 275—313, Editura tehnică, București.
GODUNOV, S. K., REABENKI, V. S. (1977). *Scheme de calcul cu diferenţe finite* (trad. din limba rusă după ediţia întîia, 1973), Partea a treia, p. 212—246, Editura tehnică, București.
GUTMANN, M. (1965). În: Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. III, p. 466—488, Editura tehnică, București.
HOFFERS, B. (1981). *A model for hydrothermal convection in the Rhine graben and its tectonic implications*, Tectonophysics, 73, p. 141—149, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
HURTIG, E., STROMEYER, D. (1979). În: Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Analysis of the Surface Heat Flow: Temperature Variations in the Upper Mantle Beneath Europe*, p. 107—111, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg — New York.
IORDACHE, O. (1981). *Procese polistocastice aplicate la fenomenele de transfer*, Cap. 3, p. 149—155, Editura Acad. R.S.R., București.
IORDACHE, O., SMIGELSCHI, O. (1981). *Ecuaţiile fenomenelor de transfer de masă şi căldură*, Cap. 3, p. 64—97, Cap. 4, p. 114—168, Cap. 5, p. 174—201, Editura tehnică, București.
ISAACSON, E., KELLER, H. B. (1966). *Analysis of Numerical Methods*, Chap. 9, p. 501—505, John Wiley and Sons, Inc., New York—London—Sydney.
JACKSON, D. (1941). *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Minnesota.
JAEGER, J. C., NEWSTEAD, G. H. (1969). *An Introduction to the Laplace Transformation with engineering applications*, Chap. IV, Methuen and Co Ltd. and Science Paperbacks.
KAPPELMEYER, O. (1979). În: Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Implications of Heat Flow Studies for Geothermal Energy Prospects*, p. 126—128, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York..
KORN, G., KORN, TH. (1961), *Mathematical handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill Book Company., Inc., New York.
LUBIMOVA, E. A., LYUBOSHITS, V. M., NIKITINA, V. N. (1976). În: Geoelectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. ÁDÁM), *Effect of contrasts in the physical properties on the heat flow and electromagnetic profiles*, p. 72—99, Akadémiai Kiadó, Budapest.
LUBIMOVA, E. A., NIKITINA, V. N. (1975). *On heat flow singularities over mid-ocean ridges*, J. Geophys. Res. 80, p. 232—243.
OBERHETTINGER, F. (1957). *Tabellen zur Fourier Transformation*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg.
OELSNER, CH. (1976). În: Geoelectric and Geothermal Studies (East—Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Ádám), *Numerical Solution of the direct problem of geothermics*, p. 67—71, Akadémiai Kiadó, Budapest.
PEACEMAN, D. W., RACHFORD, H. H. JR. (1955). *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Ind. Appl. Math, 3, p. 28—41.
POLLACK, H. N., CHAPMAN, D. S. (1977). *On the regional variation of heat flow geotherms and lithospheric thickness*, Tectonophysics 38, p. 279—296.
RICHARDSON, S. W., OXBURGH, E. R. (1978), *Heat flow, radiogenic heat production and crustal temperatures in England and Wales*, J. Geol., Soc. Lond. 135, p. 323—337.

ROTHE, R. (1949). *Matematici superioare*, vol. III (trad. din limba germană după ediţia a patra), p. 140—275, vol. IV (trad. din limba germană după ediţia a doua, 1932), p. 329, Oficiul de presă, editură şi documentare C.F.R., Bucureşti.

RYBACH, L. (1976). *Radioactive heat production and its relation to other petrophysical parameters*, Pure Appl. Geophys. **114**, p. 309—317.

RYBACH, L., FINCKH, P. G. (1979). În: Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Čermák and L. Rybach), *Heat Flow Data in Switzerland*, p. 279—282, Springer-Verlag, Berlin —Heidelberg—New York.

SABAC, I. GH. (1965). *Matematici speciale*, vol. II, Cap. IX, p. 257—296, Cap. X, p. 299—307, Cap. XI, p. 397—401, Cap. XII, p. 423—474, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti.

SALVADORI, M. G., BARON, M. L. (1961). *Numerical Methods in Engineering*, Chap. 5, N. J. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

SMIRNOV, V. (1972—1975). *Cours de mathématiques supérieures*, M., Éditions Mir, Moscou.

SNEDDON, I. N. (1951). *Fourier Transforms*, New York.

STUART, R. D. (1971). *Introducere in analiza Fourier cu aplicaţii în tehnică* (trad. din limb engleză după ediţia a doua, 1966), Cap. I, II, III, p. 8—60, Editura tehnică, Bucureşti.

TAMMEMAGI, H. Y., WHEILDON J,. (1974). *Terrestrial heat flow and heat generation in south-west England*, Geophys. J. R. Astr. Soc. **38**, p. 83—94.

TITCHMARCH E. C. (1932). *The theory of functions*, Clarendon Press, Oxford.

TITCHMARCH, E. C. (1937). *Introduction to the theory of Fourier's integrals*, Clarendon Press, Oxford.

TRANTER, C. J. (1951). *Integral transforms in mathematical physics*, Methuen, London; Wiley, New York,

VODICKA, V. (1960). *Steady Temperature Field in a Composite Doubly Infinite Strip.*, J. Phys. Soc., Jap., **15**, 1 332.

VODICKA, V. (1962). *Three-Dimensional Steady Temperature in a Stratiform Doubly Infinite Strip*, Acta Physica Austriaca, 15, 3, 193.

WERNER, D., BALKE, K. D. (1978). *Geothermal model for the rice of deeper groundwater along faults in unconsolidated rocks*, Annales Instituti Geologici Publici Hungarici, vol. LIX, fasc. 1—4, p. 801—809, Müszaki Könyvkiadó, Budapest.

WIENER N. (1933). *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge University Press.

WORTHING, A. G., GEFFNER, J. (1955). *Treatment of experimental data* (Seventh Printing), John Wiley and Sons, Inc., New York, Chapman and Hall, Limited, London.

ZELDOVITCH, I. B., KOMPANEETS, A. S. (1950). *On the theory of heat propagation and heat conduction depending on temperature*, Izd. Akad. Nauk S.S.S.R., Moscowt

ZELDOVITCH, I., MYCHKIS, A. (1974). *Éléments de mathématiques appliquées* (tradui, du russe) Chap. VII, p. 206—242, Chap. VIII, p. 243—288, Éditions Mir, Moscou.

ZORIN, YU. A. (1981). *The Baikal rift: an example of the intrusion of asthenospheric material into the lithosphere as the cause of disruption of lithospheric plates*, Tectonophysics., **73**, p. 91—104, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

ZYGMUND, A. (1959). *Trigonometric Series*, Cambridge University Press.

* * * (1965). Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. I, p. 112—116, Editura tehnică, Bucureşti.

* * *(1941), *Tables of Probability Functions.*, vol. I, Federal Works Agency, Work Projects Administration for the City of New York.

«Nefizicianului îi vine greu să creadă că legile obişnuite ale fizicii, pe care le consideră prototipul preciziei inviolabile, trebuie să se bazeze pe tendința materiei de a trece în dezordine. Principiul general implicat aici este celebra lege a doua a termodinamicii (principiul entropiei) şi fundamentul ei statistic, la fel de celebru»

ERWIN SCHRÖDINGER

5. Termoconducţia radial-plană

5.1. Ecuaţiile fundamentale

În coordonate cilindrice (fig. 5.1), ecuaţia lui Fourier (3.37) se prezintă cu termenul div $(-\tilde{\varkappa}\ \mathrm{grad}\ T)$ scris sub forma

$$\mathrm{div}(-\tilde{\varkappa}\,\mathrm{grad}\,T)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa}r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

adică

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa}r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\tilde{\mu}, \qquad (5.1)$$

unde coeficienţii $\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}}, \tilde{\varkappa}$ şi $\tilde{\mu}$ sînt, în general, dependenţi de timp, de coordonatele r, $r\varphi$, z şi de temperatura T (Birch şi Clark, 1940).

În cazul pătrunderii magmei printr-un coş subvulcanic sau vulcanic (de exemplu, la formarea unui *neck*), termoconducţia este orientată, cel puţin provizoriu şi local, perpendicular pe coş, dinspre magmă spre rocile înconjurătoare. Raportînd această termoconducţie radial-divergentă la un sistem de coordonate cilindrice (Uzdalev, 1967; Novaţkii, 1975; Prusov, 1978) a cărui axă Oz coincide cu axa coşului subvulcanic sau vulcanic şi presupunînd că temperatura T depinde numai de timp şi de coordonata r, deci $\partial T/\partial\varphi = 0$ şi $\partial T/\partial z = 0$, ecuaţia (5.1) se reduce la forma

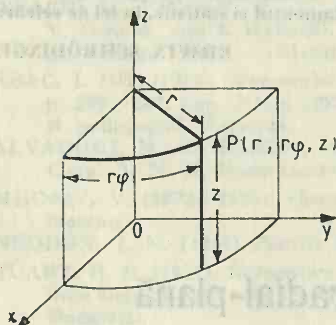


Fig. 5.1. Schema de principiu a sistemului de coordonate cilindrice

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa}\, r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \tilde{\mu}(t, r, T) \qquad (5.2)$$

în care

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial r} = \tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\, T\,\tilde{w}_r = \tilde{q}_r \qquad (5.3)$$

reprezintă, conform legii lui Fourier (3.20), densitatea fluxului (fluxul unitar) de termoconducţie radial-plană.

În cazul termoconducţiei radial-plane neconservative într-un strat de conductibilitate termică ridicată $\tilde{\varkappa}$, difuzivitate termică $\tilde{\chi} = \tilde{\varkappa}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}$, grosime M şi temperatură $T = T(t, r)$ cu $\lim\limits_{t\to 0} T(t, r) = \lim\limits_{r\to\infty} T(t, r) = T_\infty$ mărginit dedesubt printr-un strat de conductibilitate termică redusă $\tilde{\varkappa}_{inf}$, difuzivitate termică $\tilde{\chi}_{inf} = \tilde{\varkappa}_{inf}/(\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}})_{inf}$, grosime M_{inf} şi temperatură T_{inf} pe suprafaţa sa inferioară, iar deasupra printr-un alt strat de conductibilitate termică redusă $\tilde{\varkappa}_{sup}$, difuzivitate termică $\tilde{\chi}_{sup} = \tilde{\varkappa}_{sup}/(\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}})_{sup}$, grosime M_{sup} şi temperatură T_{sup} pe faţa sa superioară (fig. 5.2), fluxul elementar de căldură $\tilde{\mu}\,dV$ corespunzător productivităţii medii a unei prisme drepte de volum $dV = M\,dr(r\,d\varphi)$ este reprezentat, potrivit legii lui

Fourier, de fluxul de căldură

$$[-\tilde{\varkappa}_{inf}(T - T_{inf})/M_{inf}]dr\,(r d\varphi) + [-\tilde{\varkappa}_{sup}(T - T_{sup})/M_{sup}]dr\,(r\,d\varphi)$$

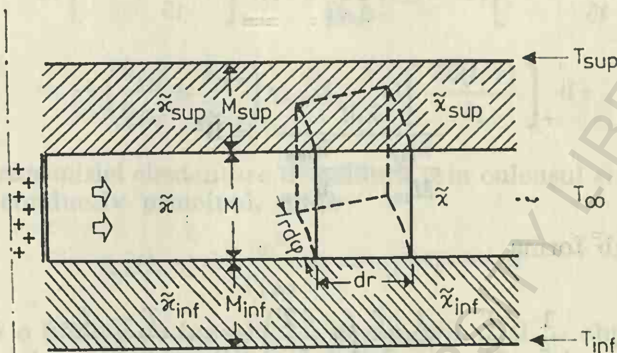


Fig. 5.2. Termoconducţia nestaţionară radial-plană într-un strat de conductibilitate termică ridicată mărginit dedesubt şi deasupra prin cîte un strat de conductibilitate termică redusă

rezultat din însumarea fluxurilor elementare prin bazele de arie $dr(r\,d\varphi)$ ale prismei, adică

$$\tilde{\mu} M r\,dr\,d\varphi = \left(-\tilde{\varkappa}_{inf}\frac{T - T_{inf}}{M_{inf}}\,r\,dr\,d\varphi\right) + \left(-\tilde{\varkappa}_{sup}\frac{T - T_{sup}}{M_{sup}}\,r\,dr\,d\varphi\right)$$

şi deci

$$\tilde{\mu} = -\frac{1}{M}\left(\tilde{\varkappa}_{inf}\frac{T - T_{inf}}{M_{inf}} + \tilde{\varkappa}_{sup}\frac{T - T_{sup}}{M_{sup}}\right). \qquad (5.4)$$

Dacă temperaturile T_{inf} şi T_{sup} se menţin constante şi egale cu T_∞, atunci termenul $\tilde{\mu}$ are expresia (4.4)

$$\tilde{\mu} = -\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}\right)\frac{T - T_\infty}{M},$$

iar ecuaţia (5.2) particularizată pentru $\partial\tilde{\varkappa}/\partial r = 0$ şi preluată cu notaţiile

$$\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}} = \tilde{\chi}$$

şi

$$\frac{\tilde{\varkappa} M}{\dfrac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \dfrac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}} = \tilde{\mathbf{B}}^2$$

se scrie sub forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{T - T_\infty}{\tilde{\mathbf{B}}^2}$$

sau

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = -\frac{T - T_\infty}{\tilde{\mathbf{B}}^2}. \qquad (5.5)$$

Presupunînd că temperatura T_∞ se menţine constantă sau, mai general, satisface ecuaţia omogenă (Lawton et al., 1980)

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial T_\infty}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial T_\infty}{\partial r} - \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial r^2} = 0$$

şi notînd diferenţa de temperatură $T - T_\infty$ prin θ, ecuaţia (5.5) se reţine astfel:

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = -\frac{\theta}{\tilde{\mathbf{B}}^2}. \qquad (5.6)$$

Dacă temperaturile T_{inf} şi T_{sup} se menţin egale cu $T - \theta$ şi deci se măresc prin propagarea căldurii, potrivit principiului al doilea al termodinamicii, în sensul diminuării diferenţei de temperatură $T - T_{inf} = T - T_{sup} = \theta(t, r)$ astfel încît unei variaţii $[-\partial\theta(t, r)/\partial t]_\tau\, d\tau$ a diferenţei de temperatură $\theta(t, r)$ la un moment τ ante-

rior momentului t îi corespunde cu întîrzierea $(t - \tau)$ o variaţie

$$\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}\gamma_{\lambda,\omega}(t-\tau)\left[-\frac{\partial\theta(t,r)}{\partial t}\right]_{\tau}\mathrm{d}\tau+\frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}\gamma_{\lambda,\omega}(t-\tau)\left[-\frac{\partial\theta(t,r)}{\partial t}\right]_{\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$=-\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}\right)\gamma_{\lambda,\omega}(t-\tau)\left[\frac{\partial\theta(t,r)}{\partial t}\right]_{\tau}\mathrm{d}\tau$$

datorită transmisiei elementare de căldură prin culcuşul şi acoperişul stratului conductiv principal, unde

$$\gamma_{\lambda,\omega}(t,\tau)=\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}(t-\tau)^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}$$

reprezintă o familie de funcţii cu parametrii λ şi ω obţinute prin derivarea *integralelor (funcţiilor) euleriene de speţa a doua incomplete (legile Gamma* denumite şi *legile lui Pearson de tipul al treilea, legea lui Erlang* etc.) în care

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^{\infty}t^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(t-\tau)^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\,\mathrm{d}(t-\tau)$$

este *funcţia lui Euler de speţa a doua* cu $\lambda > 0$, atunci termenul $\tilde{\mu}$ la momentul t se exprimă, pentru $\lambda \neq 1$, sub forma generală

$$\tilde{\mu}=-\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}\right)\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t\left[\frac{\partial\theta(t,r)}{\partial t}\right]_{\tau}(t-\tau)^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \qquad (5.7)$$

sau, pentru $\lambda = 1$ şi implicit $\Gamma(\lambda) = 1$, sub forma particulară

$$\tilde{\mu}=-\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}\right)\omega\int_0^t\left[\frac{\partial\theta(t,r)}{\partial t}\right]_{\tau}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \qquad (5.8)$$

Presupunînd că temperaturile T_{inf} şi T_{sup} satisfac ecuaţia omogenă

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa}r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

adică

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T_{inf}}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{\varkappa}r\frac{\partial T_{inf}}{\partial r}\right)=\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T_{sup}}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{\varkappa}r\frac{\partial T_{sup}}{\partial r}\right)=0$$

şi ţinînd seamă de relaţia (3.19) potrivit căreia $\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}=\tilde{\varkappa}/\tilde{\chi}$ precum şi de relaţiile (5.7) şi (5.8), ecuaţia (5.2) poate fi preluată, cu notaţia $T - T_{inf} = T - T_{sup} = \theta\ (t, r)$, astfel:

$$\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{\varkappa}r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}\right)\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{\tau}(t-\tau)^{\lambda-1}\,e^{-\omega(t-\tau)}\,d\tau \qquad (5.9)$$

şi respectiv

$$\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{\varkappa}r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}\right)\omega\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{\tau}e^{-\omega(t-\tau)}\,d\tau. \qquad (5.10)$$

Pentru $\partial\tilde{\varkappa}/\partial r=0$, ecuaţiile (5.9) şi (5.10) se reţin, respectiv, prin intermediul notaţiei

$$\frac{\tilde{\varkappa}}{\dfrac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{\tilde{\chi}_{inf}}+\dfrac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{\tilde{\chi}_{sup}}}=\tilde{\chi}', \qquad (5.11)$$

sub formele

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}=-\frac{1}{\tilde{\chi}'}\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{\tau}(t-\tau)^{\lambda-1}\,e^{-\omega(t-\tau)}\,d\tau \qquad (5.12)$$

și

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}=-\frac{1}{\tilde{\chi}'}\,\omega\int\limits_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_\tau e^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.13}$$

5.2. Termoconducția staționară conservativă

În vecinătatea unui neck activ, termoconducția radial-plană se poate presupune, cel puțin temporar și local, ca fiind staționară conservativă, dacă prin condițiile $\partial T/\partial t=0$ și $\tilde{\mu}=0$ sau numai prin condiția $\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\partial T/\partial t=\tilde{\mu}$ ecuația (5.2) se reduce, pentru $\mathrm{d}T=$ $=(\partial T/\partial r)\mathrm{d}r$ și $\mathrm{d}\tilde{\varkappa}=(\partial\tilde{\varkappa}/\partial r)\,\mathrm{d}r$, la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\tilde{\varkappa}r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{5.14}$$

în care densitatea fluxului de termoconducție

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=\tilde{q}_r$$

depinde de distanța r față de axa neckului. Particularizînd pentru termoconducția axial-simetrică cu fluxul $Q=const.$ într-un strat omogen și izotrop de grosime uniformă M (fig. 5.3) și exprimînd densitatea $\tilde{q}_r$ a fluxului de termoconducție prin raportul dintre fluxul Q și aria secțiunii sale de front $2\pi rM$, se obține ecuația

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=\frac{Q}{2\pi rM}$$

sau

$$\mathrm{d}T=-\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}M}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{5.15}$$

din a cărei integrare, mai întîi între marginea neckului unde pentru $r=r_0$ corespunde $T=T_0$ și o secțiune de front oarecare situată față de axa neckului la distanța r unde temperatura este T sau între această secțiune și marginea domeniului de influență unde pentru $r=R$ corespunde $T=T_\infty=const.$, iar apoi între r_0 și R sau între $r=r_1$ unde $T=T_1$ și $r=r_2$ unde $T=T_2$, rezultă respectiv

formulele ecuației de variație a temperaturii

$$T = T_0 - \frac{Q}{2\,\pi\tilde{\varkappa} M}\ln\frac{r}{r_0} = T_\infty + \frac{Q}{2\,\pi\tilde{\varkappa}\,M}\ln\frac{R}{r} \tag{5.16}$$

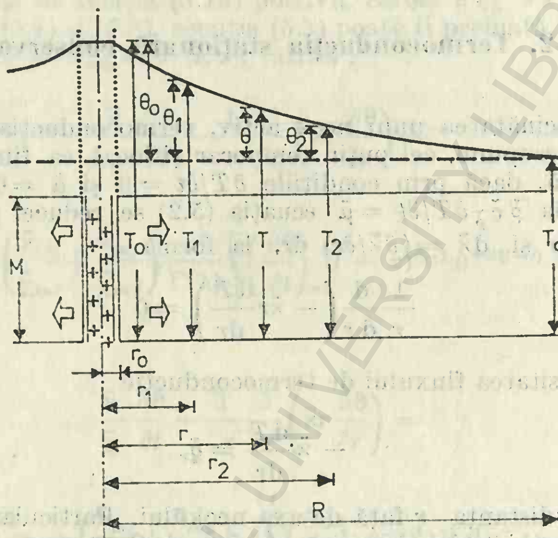


Fig. 5.3. Termoconducția axial-simetrică într-un strat omogen și izotrop cu grosime uniformă

și fluxului de termoconducție

$$Q = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M(T_0 - T)}{\ln\frac{r}{r_0}} = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M(T - T_\infty)}{\ln\frac{R}{r}} =$$

$$= \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M(T_0 - T_\infty)}{\ln\frac{R}{r_0}} = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \tag{5.17}$$

Prin intermediul notațiilor

$$T_0 - T_\infty = \theta_0;\ T - T_\infty = \theta;\ T_1 - T_\infty = \theta_1;\ T_2 - T_\infty = \theta_2$$

precum şi al relaţiilor evidente

$$T_0 - T = (T_0 - T_\infty) - (T - T_\infty) = \theta_0 - \theta;$$

$$T_1 - T_2 = (T_1 - T_\infty) - (T_2 - T_\infty) = \theta_1 - \theta_2,$$

formulele (5.17) mai pot fi scrise astfel :

$$Q = \frac{2\pi\tilde{\varkappa} M(\theta_0 - \theta)}{\ln \frac{r}{r_0}} = \frac{2\pi\tilde{\varkappa} M\theta}{\ln \frac{R}{r}} =$$

$$= \frac{2\pi\tilde{\varkappa} M\theta_0}{\ln \frac{R}{r_0}} = \frac{2\pi\tilde{\varkappa} M(\theta_1 - \theta_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{5.18}$$

Potrivit formulelor (5.18) există egalităţile

$$\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa} M} = \frac{\theta_1}{\ln \frac{R}{r_1}} = \frac{\theta_2}{\ln \frac{R}{r_2}} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

din care se deduce că

$$\ln R = \frac{\theta_1(\ln r_2 - \ln r_1) + (\theta_1 - \theta_2)\ln r_1}{\theta_1 - \theta_2} =$$

$$= \frac{\theta_2(\ln r_2 - \ln r_1) + (\theta_1 - \theta_2)\ln r_2}{\theta_1 - \theta_2}$$

şi deci

$$\ln R = \frac{\theta_1 \ln r_2 - \theta_2 \ln r_1}{\theta_1 - \theta_2}, \tag{5.19}$$

unde R reprezintă *raza de influenţă termică* a neckului.

În cazul termoconducţiei axial-simetrice cu fluxul $Q = const.$ într-un strat de grosime uniformă care însă prezintă variaţii discon-

tinue de conductibilitate termică după suprafețe cilindrice dispuse simetric față de axa neckului (fig. 5.4, a) sau după plane paralele cu fețele stratului (fig. 5.4, b), adică similar cu (4.14) sau (4.14'),

$$\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(r) = \begin{cases} \tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} = const. \text{ pentru } r_1 \leqslant r < r_{\mathrm{I/II}}, \\ \tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} = const. \text{ pentru } r_{\mathrm{I/II}} \leqslant r < r_{\mathrm{II/III}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\varkappa}_{(n)} = const. \text{ pentru } r_{(n-\mathrm{I})/(n)} \leqslant r < r_2 \end{cases}$$

sau

$$\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(z) = \begin{cases} \tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} = const. \text{ pentru } z_1 \leqslant z < z_{\mathrm{I/II}} = z_1 + M_{\mathrm{I}}, \\ \tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} = const. \text{ pentru } z_{\mathrm{I/II}} = z_1 + M_{\mathrm{I}} \leqslant z < z_{\mathrm{II/III}} = z_1 + M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\varkappa}_{(n)} = const. \text{ pentru } z_{(n-\mathrm{I})/(n)} = z_1 + M_{\mathrm{I}} + \dots + M_{(n-\mathrm{I})} = \\ \qquad = z_2 - M_{(n)} \leqslant z < z_2, \end{cases}$$

ecuația (5.15) poate fi reluată respectiv sub formele

$$-2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} M \left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_{\mathrm{I}} = -2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} M \left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_{\mathrm{II}} = \dots$$

$$\dots = -2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)} M \left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_{(n)} = Q = const. \tag{5.20}$$

sau

$$\left(-2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} M_{\mathrm{I}} r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) + \left(-2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} M_{\mathrm{II}} r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(-2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)} M_{(n)} r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = Q = const. \tag{5.21}$$

Din integrarea ecuațiilor (5.20) rezultă că pentru temperatura pe suprafețele cilindrice de contact a două porțiuni succesive de

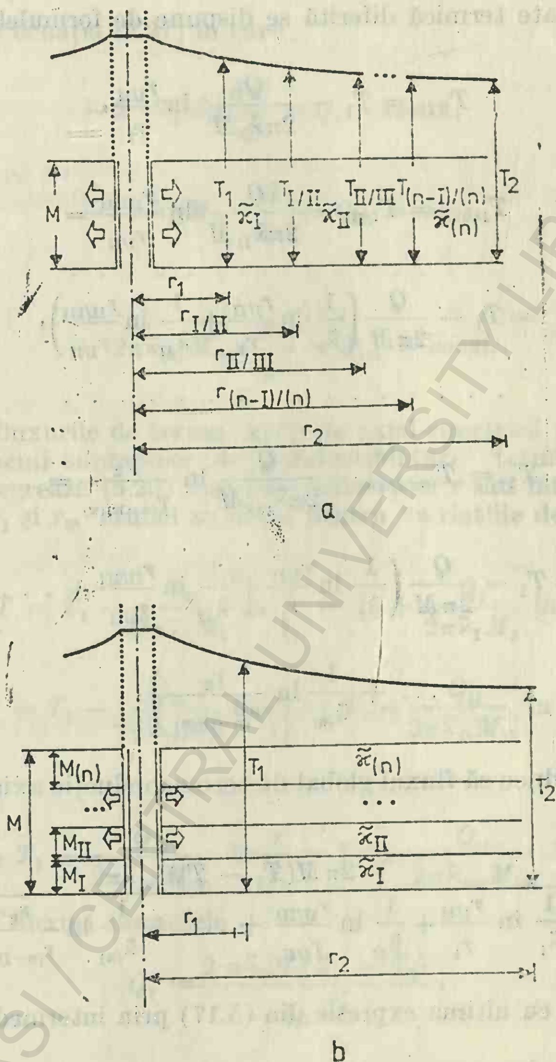


Fig. 5.4. Termoconducţia axial-simetrică într-un strat cu grosime uniformă care prezintă variaţii discontinue de conductibilitate termică:

a – după suprafeţe cilindrice dispuse simetric faţă de axa neckului; *b* – după plane paralele cu feţele stratului

conductibilitate termică diferită se dispune de formulele

$$T_{I/II} = T_1 - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}_I M} \ln \frac{r_{I/II}}{r_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_{II/III} = T_{I/II} - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}_{II} M} \ln \frac{r_{II/III}}{r_{I/II}} =$$

$$= T_1 - \frac{Q}{2\pi M}\left(\frac{1}{\tilde{\varkappa}_I} \ln \frac{r_{I/II}}{r_1} + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{II}} \ln \frac{r_{II/III}}{r_{I/II}}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_2 = T_{(n-I)/(n)} - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)} M} \ln \frac{r_2}{r_{(n-I)/(n)}} =$$

$$= T_1 - \frac{Q}{2\pi M}\left(\frac{1}{\tilde{\varkappa}_I} \ln \frac{r_{I/II}}{r_1} + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{II}} \ln \frac{r_{II/III}}{r_{I/II}} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{(n)}} \ln \frac{r_2}{r_{(n-I)/(n)}}\right), \tag{5.22}$$

de unde se deduce că fluxul global de termoconducție axial-simetrică are expresia

$$Q = \frac{2\pi M(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\tilde{\varkappa}_I} \ln \frac{r_{I/II}}{r_1} + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{II}} \ln \frac{r_{II/III}}{r_{I/II}} + \ldots + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{(n)}} \ln \frac{r_2}{r_{(n-I)/(n)}}} \tag{5.23}$$

asemănătoare cu ultima expresie din (5.17) prin intermediul relației

$$\tilde{\varkappa}_{med\perp} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\frac{1}{\tilde{\varkappa}_I} \ln \frac{r_{I/II}}{r_1} + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{II}} \ln \frac{r_{II/III}}{r_{I/II}} + \ldots + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{(n)}} \ln \frac{r_2}{r_{(n-I)/(n)}}}. \tag{5.24}$$

Revenind la ecuația (5.21) în care

$$-2\pi\tilde{\varkappa}_{I}M_{I}r\frac{dT}{dr}=Q_{I}=const.,$$

$$-2\pi\tilde{\varkappa}_{II}M_{II}r\frac{dT}{dr}=Q_{II}=const.,$$

. . . .

$$-2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)}M_{(n)}r\frac{dT}{dr}=Q_{(n)}=const. \qquad (5.25)$$

reprezintă fluxurile de termoconducție axial-simetrică aferente celor (n) subdomenii suprapuse de conductibilitate termică diferită, dacă se integrează (5.25) mai întîi între r_1 și r sau între r și r_2, iar apoi între r_1 și r_2, atunci se obțin pentru variațiile de temperatură ecuațiile

$$T=T_1-\frac{Q_{I}}{2\pi\tilde{\varkappa}_{I}M_{I}}\ln\frac{r}{r_1}=T_2+\frac{Q_{I}}{2\pi\tilde{\varkappa}_{I}M_{I}}\ln\frac{r_2}{r},$$

$$T=T_1-\frac{Q_{II}}{2\pi\tilde{\varkappa}_{II}M_{II}}\ln\frac{r}{r_1}=T_2+\frac{Q_{II}}{2\pi\tilde{\varkappa}_{II}M_{II}}\ln\frac{r_2}{r},$$

. . . .

$$T=T_1-\frac{Q_{(n)}}{2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)}M_{(n)}}\ln\frac{r}{r_1}=T_2+\frac{Q_{(n)}}{2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)}M_{(n)}}\ln\frac{r_2}{r}, \qquad (5.26$$

iar pentru fluxuri formulele

$$Q_{I}=\frac{2\pi\tilde{\varkappa}_{I}M_{I}(T_1-T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}},$$

$$Q_{II}=\frac{2\pi\tilde{\varkappa}_{II}M_{II}(T_1-T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

. . . .

$$Q_{(n)} = \frac{2\,\pi\tilde{\varkappa}_{(n)} M_{(n)}(T_1 - T_2)}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}. \tag{5.27}$$

Potrivit cu (5.21) şi (5.25), suma fluxurilor parţiale $Q_{I}, Q_{II}, \ldots, Q_{(n)}$ este egală cu fluxul total de termoconducţie axial-simetrică

$$Q = Q_I + Q_{II} + \ldots + Q_{(n)} =$$

$$= \frac{2\pi(\tilde{\varkappa}_I M_I + \tilde{\varkappa}_{II} M_{II} + \ldots + \tilde{\varkappa}_{(n)} M_{(n)})(T_1 - T_2)}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} \tag{5.28}$$

a cărui expresie se aseamănă cu ultima expresie din (5.17) prin intermediul relaţiei de aceeaşi formă cu (4.24):

$$\tilde{\varkappa}_{med\,||} = \frac{\tilde{\varkappa}_I M_I + \tilde{\varkappa}_{II} M_{II} + \ldots + \tilde{\varkappa}_{(n)} M_{(n)}}{M}.$$

5.3. Termoconducţia staţionară neconservativă

Dacă, în vecinătatea unui neck, cîmpul de temperatură se menţine staţionar sau cel puţin cvasistaţionar şi productivitatea medie de căldură a unităţii de volum depinde numai de coordonata cilindrică r şi de temperatură, atunci ecuaţia (5.2) se particularizează, pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial r)\mathrm{d}r$, sub forma

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\tilde{\varkappa} r \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = \tilde{\mu}(r, T) \tag{5.29}$$

corespunzătoare termoconducţiei radial-plane staţionare neconservative al cărei flux are densitatea prezentată prin expresia (5.3) preluată cu condiţia

$$\lim_{r\to r_0}\left(-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = \lim_{r\to r_0} \tilde{q}_r = \tilde{q}_{r_0}, \tag{5.30}$$

unde r_0 este distanța dintre axa și marginea neckului. Pentru termoconducția axial-simetrică cu fluxul $Q = const.$ într-un strat de grosime $M = const.$, conductibilitate termică $\tilde{\varkappa} = const.$ și productivitate medie de căldură a unității de volum $\tilde{\mu} = const.$, ecuația (5.29) și condiția la limită (5.30) devin respectiv :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}} \tag{5.31}$$

și

$$\lim_{r\to r_0}\left(-r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}M}. \tag{5.32}$$

Reluînd ecuația (5.31) sub forma

$$\mathrm{d}\left(-r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}r\,\mathrm{d}r$$

și integrînd de la r_0 la r și respectiv de la $Q/(2\pi\tilde{\varkappa}M)$ la $-r\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$, rezultă că

$$-r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}M} = \frac{\tilde{\mu}}{2\tilde{\varkappa}}(r^2 - r_0^2)$$

și deci

$$\mathrm{d}T = -\frac{1}{2\tilde{\varkappa}}\left(\frac{Q}{\pi M} - \tilde{\mu}\,r_0^2\right)\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{\tilde{\mu}}{2\tilde{\varkappa}}\,r\,\mathrm{d}r, \tag{5.33}$$

unde $\lim\limits_{r\to r_0} T(r) = T_0$, $\lim\limits_{r\to r_1} T(r) = T_1$, $\lim\limits_{r\to r_2} T(r) = T_2$ și $\lim\limits_{r\to R} T(r) = T_\infty$, pentru $r_0 \leqslant r \leqslant R$ și $r_0 < r_1 < r_2 < R$. Din integrarea ecuației (5.33) mai întîi între r_0 și r sau între r și R, iar apoi între r_c și R sau între r_1 și r_2, se obțin formulele ecuației de variație a temperaturii

$$T = T_0 - \frac{1}{2\tilde{\varkappa}}\left[\left(\frac{Q}{\pi M} - \tilde{\mu}r_0^2\right)\ln\frac{r}{r_0} + \frac{\tilde{\mu}}{2}(r^2 - r_0^2)\right] =$$

$$= T_\infty + \frac{1}{2\tilde{\varkappa}}\left[\left(\frac{Q}{\pi M} - \tilde{\mu}\,r_0^2\right)\ln\frac{R}{r} + \frac{\tilde{\mu}}{2}(R^2 - r^2)\right] \tag{5.34}$$

și fluxului de termoconducție

$$Q = \pi M\left[\frac{2\tilde{\varkappa}(T_0 - T) - \dfrac{\tilde{\mu}}{2}(r^2 - r_0^2)}{\ln\dfrac{r}{r_0}} + \mu r_0^2\right] =$$

$$= \pi M\left[\frac{2\tilde{\varkappa}(T - T_\infty) - \dfrac{\tilde{\mu}}{2}(R^2 - r^2)}{\ln\dfrac{R}{r}} + \tilde{\mu} r_0^2\right] =$$

$$= \pi M\left[\frac{2\tilde{\varkappa}(T_0 - T_\infty) - \dfrac{\tilde{\mu}}{2}(R^2 - r_0^2)}{\ln\dfrac{R}{r_0}} + \tilde{\mu} r_0^2\right] =$$

$$= \pi M\left[\frac{2\tilde{\varkappa}(T_1 - T_2) - \dfrac{\tilde{\mu}}{2}(r_2^2 - r_1^2)}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} + \tilde{\mu} r_0^2\right]. \qquad (5.35)$$

Dacă termoconducția radial-plană staționară neconservativă este datorită unui neck cu raza r suficient de mică pentru a se putea presupune nulă și este caracterizată printr-un *factor de neconservativitate*

$$\tilde{B} = \sqrt{\frac{\tilde{\varkappa} M}{\dfrac{\tilde{\varkappa}_{inf}}{M_{inf}} + \dfrac{\tilde{\varkappa}_{sup}}{M_{sup}}}} = const.$$

și printr-un flux $Q = const.$ în stratul conductiv principal de grosime $M = const.$ și conductibilitate termică $\tilde{\varkappa} = const.$, iar diferența de temperatură $T - T_\infty = \theta$ depinde numai de coordonata cilindrică r și deci $d\theta = (\partial\theta/\partial r)dr$, atunci ecuația (5.6) se reține sub

forma

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-\frac{\theta}{\tilde{B}^2}=0 \tag{5.36}$$

sau

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(-r\frac{d\theta}{dr}\right)=-\frac{\theta}{\tilde{B}^2} \tag{5.36'}$$

împreună cu condiția

$$\lim_{r\to 0}\left(-r\frac{d\theta}{dr}\right)=\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}M}. \tag{5.37}$$

Reluînd ecuația (5.36') sub forma

$$\frac{d\left(-r\frac{d\theta}{dr}\right)}{-r\frac{d\theta}{dr}}=-\frac{\theta dr}{\tilde{B}^2\left(-\frac{d\theta}{dr}\right)}=-\frac{\theta}{-\frac{d\theta}{d\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)}}d\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)=-dX\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) \tag{5.38}$$

în care variabila de integrare $X(r/\tilde{B})$ satisface condiția

$$\lim_{\frac{r}{\tilde{B}}\to 0}X\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)=0$$

și integrînd de la $X(r/\tilde{B})=0$ la $X(r/\tilde{B})$ și respectiv de la $-r d\theta/dr=$ $=Q/(2\pi\tilde{\varkappa}M)$ la $-r d\theta/dr$, se deduce că

$$\ln\left(\frac{-r\frac{d\theta}{dr}}{\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}M}}\right)=-X\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$$

sau

$$-d\theta=\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}M}\frac{e^{-X(r/\tilde{B})}}{r/\tilde{B}}d\left(\frac{r}{B}\right), \tag{5.39}$$

de unde, printr-o nouă integrare de la $r/\tilde{\mathbf{B}}$ la ∞ şi respectiv de la θ la 0, rezultă:

$$\theta = \frac{Q}{2\pi\varkappa M}\int_{r/\tilde{\mathbf{B}}}^{\infty}\frac{e^{-X(r/\tilde{\mathbf{B}})}}{r/\tilde{\mathbf{B}}}\mathrm{d}\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right). \tag{5.40}$$

Întrucît ecuaţia (5.36) se identifică, pentru $\tilde{\mathbf{B}} = const.$, cu *ecuaţia lui Bessel modificată*

$$\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}(r/\tilde{\mathbf{B}})^2} + \left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}(r/\tilde{\mathbf{B}})} - \left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right)^2\theta = 0 \tag{5.41}$$

care are soluţia generală (Gray şi Mathews, 1958)

$$\theta = \theta\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = C_1\mathbf{I}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) + C_2\mathbf{K}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right),$$

unde

$$\mathbf{I}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = \lim_{\nu\to 0}\mathbf{I}_\nu\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = \lim_{\nu\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2\tilde{\mathbf{B}}}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2\tilde{\mathbf{B}}}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2\tilde{\mathbf{B}}}\right)^{2n}}{(n!)^2} = \frac{e^{r/\tilde{\mathbf{B}}}}{\sqrt{2\pi(r/\tilde{\mathbf{B}})}}\left[1 + \frac{1^2}{1!\,8r/\tilde{\mathbf{B}}} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8r/\tilde{\mathbf{B}})^2} + \ldots\right]$$

şi

$$\mathbf{K}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = \lim_{\nu\to 0}\mathbf{K}_\nu\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = \lim_{\nu\to 0}\frac{\pi[\mathbf{I}_{-\nu}(r/\tilde{\mathbf{B}}) - \mathbf{I}_\nu(r/\tilde{\mathbf{B}})]}{2\sin\nu\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{I}_{-\nu}(r/\tilde{\mathbf{B}})}{\partial\nu} - \frac{\partial \mathbf{I}_\nu(r/\tilde{\mathbf{B}})}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} = -\ln\left(\frac{r}{2\tilde{\mathbf{B}}}\right)\cdot\mathbf{I}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{2\tilde{\mathbf{B}}}\right)^{2n}}{(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathrm{C}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{(r/\tilde{B})\cos\omega}\left[\ln\left(2\frac{r}{\tilde{B}}\sin^2\omega\right)+C\right]d\omega =$$

$$= \int_0^{\infty}\cos\left(\frac{r}{\tilde{B}}\operatorname{sh}\omega\right)d\omega = \int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{r}{\tilde{B}}\omega\right)}{\sqrt{\omega^2+1}}d\omega = \frac{e^{-r/\tilde{B}}}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(r/\tilde{B})\lambda}}{\sqrt{\lambda\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}}d\lambda =$$

$$= \frac{e^{-r/\tilde{B}}\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{e^{-(r/\tilde{B})\lambda}}{\sqrt{\lambda}\left(1+\frac{\lambda\sin^2\omega}{2}\right)}d\omega d\lambda = \int_0^{\infty}e^{-(r/\tilde{B})\operatorname{ch}\omega}d\omega =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2r/\tilde{B}}}\,e^{-r/\tilde{B}}\left[1-\frac{1^2}{1!8r/\tilde{B}}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!(8r/\tilde{B})^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!(8r/\tilde{B})^3}+\dots\right]$$

reprezintă *funcțiile lui Bessel modificate de ordinul zero și speța întîia* și respectiv *a doua* (Kummer, 1837; Kirchhoff, 1854; Mehler, 1881; Stieltjes, 1886; Basset, 1888, 1889; Macdonald, 1899; Nicholson, 1911; Watson, 1949; Churchill, 1958; Gray și Mathews, 1958), iar

$$\Gamma(\nu+n+1) = \int_0^{\infty}\xi^{\nu+n}e^{-\xi}d\xi\,,\quad \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty}\xi^{n}e^{-\xi}d\xi = n!$$

și

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0{,}5772156649\dots$$

sînt respectiv *funcția lui Euler de speța a doua* și *constanta lui Euler*, urmează că soluția (5.40) se determină prin soluția generală a ecuației lui Bessel modificate cu condiția ca limita funcției $\theta = \theta(r/\tilde{B})$ să se mențină finită pentru $r \to \infty$ și cu condiția la limită dată, potrivit cu (5.37), prin

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left[-\frac{r}{\tilde{B}}\frac{d\theta(r/\tilde{B})}{d(r/\tilde{B})}\right] = \frac{Q}{2\pi\tilde{\lambda}M}.$$

Impunînd aceste condiţii pentru soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel modificate şi ţinînd seamă că

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to\infty} I_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \infty$$

şi

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left[\frac{r}{\tilde{B}}\,\frac{d K_0(r/\tilde{B})}{d(r/\tilde{B})}\right] = \lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left[-\frac{r}{\tilde{B}} K_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\right] = -1,$$

se deduce respectiv că $C_1 = 0$ şi $C_2 = Q/2\pi \tilde{\varkappa} M$, astfel încît soluţia (5.40) se transpune sub forma

$$\theta = \frac{Q}{2\,\pi\tilde{\varkappa} M} K_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right). \tag{5.42}$$

Valorile uzuale ale funcţiilor $K_0(r/\tilde{B})$ şi $K_1(r/\tilde{B}) = -\,dK_0(r/\tilde{B})/d(r/\tilde{B})$ numite *funcţiile lui Bessel modificate de speţa a doua şi ordinele zero* şi respectiv *unu* sînt prezentate în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1

Valorile uzuale ale funcţiilor lui Bessel modificate de speţa a doua şi ordinele zero şi unu (după Aldis, 1894)

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
0,1	2,42707	9,85384	1,7	0,16550	0,20936
0,2	1,75270	4,77597	1,8	0,14593	0,18262
0,3	1,37246	3,05599	1,9	0,12885	0,15966
0,4	1,11453	2,18435	2,0	0,11389	0,13987
0,5	0,92442	1,65644	2,1	0,10078	0,12275
0,6	0,77752	1,30283	2,2	0,08927	0,10790
0,7	0,66052	1,05028	2,3	0,07914	0,09498
0,8	0,56535	0,86178	2,4	0,07022	0,08372
0,9	0,48673	0,71653	2,5	0,06235	0,07389
1,0	0,42102	0,60191	2,6	0,05540	0,06528
1,1	0,36560	0,50976	2,7	0,04926	0,05774
1,2	0,31851	0,43459	2,8	0,04382	0,05111
1,3	0,27825	0,37255	2,9	0,03901	0,04529
1,4	0,24366	0,32084	3,0	0,03474	0,04016
1,5	0,21381	0,27739	3,1	0,03095	0,03563
1,6	0,18795	0,24063	3,2	0,02759	0,03164

(continuare tabel 5.1)

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
3,3	0,02461	0,02812	7,7	0,00020	0,00021
3,4	0,02196	0,02500	7,8	0,00018	0,00019
3,5	0,01960	0,02224	7,9	0,00016	0,00017
3,6	0,01750	0,01979	8,0	0,00015	0,00016
3,7	0,01563	0,01763	8,1	0,000132	0,000140
3,8	0,01397	0,01571	8,2	0,000118	0,000126
3,9	0,01248	0,01399	8,3	0,000107	0,000113
4,0	0,01116	0,01248	8,4	0,000096	0,000101
4,1	0,00998	0,01114	8,5	0,000086	0,000091
4,2	0,00893	0,00994	8,6	0,000078	0,000082
4,3	0,00799	0,00887	8,7	0,000070	0,000074
4,4	0,00715	0,00792	8,8	0,000063	0,000066
4,5	0,00640	0,00708	8,9	0,000057	0,000060
4,6	0,00573	0,00633	9,0	0,000051	0,000054
4,7	0,00513	0,00565	9,1	0,000046	0,000048
4,8	0,00460	0,00506	9,2	0,000041	0,000043
4,9	0,00412	0,00452	9,3	0,000037	0,000039
5,0	0,00369	0,00404	9,4	0,000033	0,000035
5,1	0,00331	0,00362	9,5	0,000030	0,000032
5,2	0,00297	0,00324	9,6	0,000027	0,000028
5,3	0,00266	0,00290	9,7	0,000024	0,000026
5,4	0,00238	0,00260	9,8	0,000022	0,000023
5,5	0,00214	0,00233	9,9	0,000020	0,000021
5,6	0,00192	0,00208	10,0	0,000018	0,000019
5,7	0,00172	0,00187	10,1	0,000016	0,000017
5,8	0,00154	0,00167	10,2	0,000014	0,000015
5,9	0,00139	0,00150	10,3	0,000013	0,000014
6,0	0,00124	0,00134	10,4	0,000012	0,000012
6,1	0,00112	0,00120	10,5	0,000011	0,000011
6,2	0,00100	0,00108	10,6	0,000009	0,000010
6,3	0,00090	0,00097	10,7	0,000009	0,000009
6,4	0,00081	0,00087	10,8	0,000008	0,000008
6,5	0,00073	0,00078	10,9	0,000007	0,000007
6,6	0,00065	0,00070	11,0	0,000006	0,000007
6,7	0,00059	0,00063	11,1	0,000006	0,000006
6,8	0,00053	0,00056	11,2	0,000005	0,000005
6,9	0,00047	0,00051	11,3	0,000005	0,000005
7,0	0,00042	0,00045	11,4	0,000004	0,000004
7,1	0,00038	0,00041	11,5	0,000004	0,000004
7,2	0,00034	0,00037	11,6	0,000003	0,000003
7,3	0,00031	0,00033	11,7	0,000003	0,000003
7,4	0,00028	0,00030	11,8	0,000003	0,000003
7,5	0,00025	0,00027	11,9	0,000002	0,000003
7,6	0,00022	0,00024	12,0	0,000002	0,000002

Într-un strat conductiv principal omogen însă anizotrop, ca și într-o placă omogenă și anizotropă (Saint-Venant, 1865; Voigt, 1886; Brilla, 1962; Savin și Grilițkii, 1968; Iliușin și Pobedria, 1970; Kovalenko, 1970; Grilițkii și Popovici, 1971; Podstrigaci și Koliano, 1972, 1976; Domașov, 1975 a, 1975 b; Uzdalev, 1975; Prusov, 1976; Prusov și Savenkov, 1977; Prusov și Soloduha, 1977; Prusov și Vasilevici, 1977), termoconducția radial-plană staționară neconservativă caracterizată printr-un factor $\tilde{\mathbf{B}}_r = \tilde{\mathbf{B}}(r)$ nu este axial-simetrică, dar se poate asimila acesteia și deci se poate utiliza soluția (5.42) reluată sub forma

$$\theta = \frac{Q}{2\pi(\varkappa M)_e}\,\mathbf{K}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}_r}\right), \tag{5.43}$$

unde se introduce transmisivitatea termică echivalentă $(\varkappa M)_e$ invariabilă cu direcția în locul transmisivității termice $(\varkappa M)_r$ variabile cu direcția și *factorul de neconservativitate*

$$\tilde{\mathbf{B}}_r = \sqrt{\frac{(\varkappa M)_r}{\dfrac{\varkappa_{inf}}{M_{inf}} + \dfrac{\varkappa_{sup}}{M_{sup}}}} \tag{5.44}$$

variabil cu direcția prin intermediul transmisivității termice $(\varkappa M)_r$. Dacă transmisivitatea termică a stratului conductiv principal variază elipsoidal conform ecuației

$$\frac{(\varkappa M)_r^2 \cos^2\varphi}{(\varkappa M)_x^2} + \frac{(\varkappa M)_r^2 \sin^2\varphi}{(\varkappa M)_y^2} - 1 = 0, \tag{5.45}$$

în care $(\varkappa M)_x$ și $(\varkappa M)_y$ sînt valorile maximă și respectiv minimă ale transmisivității termice după cele două direcții principale de anizotropie, iar φ este unghiul direcției cu transmisivitatea termică $(\varkappa M)_r$ față de direcția cu transmisivitatea termică maximă (fig. 5.5), atunci expresia transmisivității termice echivalente $(\varkappa M)_e$ se deduce impunînd condiția ca aria cercului de rază $(\varkappa M)_e$ să fie egală cu aria elipsei de semiaxe $(\varkappa M)_x$ și $(\varkappa M)_y$, adică $\pi(\varkappa M)_e^2 = \pi(\varkappa M)_x(\varkappa M)_y$ și deci

$$(\varkappa M)_e = \sqrt{(\varkappa M)_x(\varkappa M)_y}, \tag{5.46}$$

iar expresia transmisivității termice $(\tilde{\varkappa} M)_r$ se obține direct din (5.45):

$$(\tilde{\varkappa} M)_r = \frac{(\tilde{\varkappa} M)_x (\tilde{\varkappa} M)_y}{\sqrt{(\tilde{\varkappa} M)_x^2 \sin^2\varphi + (\tilde{\varkappa} M)_y^2 \cos^2\varphi}} =$$

$$= \frac{(\tilde{\varkappa} M)_x}{\sqrt{\frac{(\tilde{\varkappa} M)_x^2}{(\tilde{\varkappa} M)_y^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}} = \frac{(\tilde{\varkappa} M)_y}{\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{(\tilde{\varkappa} M)_y^2}{(\tilde{\varkappa} M)_x^2}\cos^2\varphi}}. \quad (5.47)$$

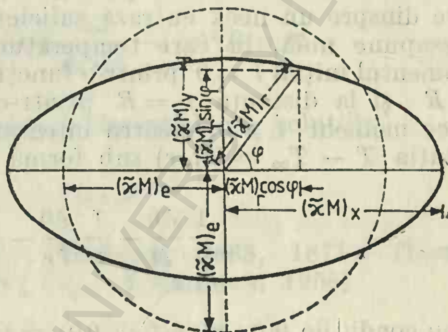


Fig. 5.5. Reprezentarea anizotropiei unui strat conductiv

5.4. Termoconducția nestaționară conservativă

Pentru termoconducția radial-plană într-un domeniu fără surse interioare de căldură ($\tilde{\mu} = 0$), ecuația (5.2) se reține sub forma

$$\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa} r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

sau, potrivit cu (3.19),

$$\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\chi}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa} r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0. \quad (5.48)$$

Dacă domeniul este omogen și izotrop, deci $\partial\tilde{\varkappa}/\partial r = 0$, atunci ecuația (5.48) corespunzătoare termoconducției radial-plane nesta-

ționare conservative devine:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\tilde{\chi}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0. \qquad (5.49)$$

Această ecuație cu derivate parțiale poate fi integrată atît prin *metoda separării variabilelor*, cît și prin *metoda operațională a transformatei Laplace*.

În cazul termoconducției axial-simetrice nestaționare conservative dinspre un neck cu raza suficient de mică pentru a se putea presupune nulă, în care temperatura $T = T(t, r)$ se prezintă la momentul inițial $t = 0$ printr-o funcție $T(0, r)$ în intervalul $0 \leqslant r \leqslant R$ și la distanța $r = R$ printr-o constantă $T(t, R) = T_\infty$ în orice moment $t \geqslant 0$, pentru integrarea ecuației (5.49) preluate cu notația $T - T_\infty = \theta(t, r)$ sub forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial \theta}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r}-\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2}=0 \qquad (5.50)$$

și cu condițiile $\theta(0, r) = f(r)$, $f(0) = finită$, $f(R) = 0$ și $\theta(t, R) = 0$ se poate folosi *metoda separării variabilelor*. Recurgînd la o soluție $\theta = \theta(t, r) = \mathcal{T}(t)\cdot\mathcal{R}(r)$ care trebuie să satisfacă ecuația (5.50)

$$\frac{\mathcal{R}}{\tilde{\chi}}\frac{d\mathcal{T}}{dt}-\frac{\mathcal{T}}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr}-\mathcal{T}\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2}=0$$

și separînd variabilele în expresii egale cu o aceeași valoare acceptabilă numai ca negativă deoarece se caută o soluție mărginită pentru $t \geqslant 0$, rezultă ecuațiile diferențiale

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathcal{T}}\frac{d\mathcal{T}}{dt}=\frac{1}{r\mathcal{R}}\frac{d\mathcal{R}}{dr}+\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2}=-\lambda^2$$

reprezentate respectiv prin ecuația diferențială ordinară de ordinul întîi

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt}+\lambda^2\tilde{\chi}\mathcal{T}=0$$

sau

$$\frac{d\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = -\lambda^2 \tilde{\chi}\, dt$$

și prin *ecuația lui Bessel*

$$\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr} + \lambda^2\mathcal{R} = 0$$

sau

$$(\lambda r)^2 \frac{d^2\mathcal{R}}{d(\lambda r)^2} + (\lambda r)\frac{d\mathcal{R}}{d(\lambda r)} + (\lambda r)^2\mathcal{R} = 0.$$

Întrucît aceste ultime două ecuații diferențiale au soluțiile

$$\mathcal{T}(t, \lambda) = C_t(\lambda)e^{-\lambda^2\tilde{\chi}t}$$

și respectiv (Lipschitz, 1859; Lommel, 1868, 1871; Thomson (Kelvin), 1890; Watson, 1949; Gray și Mathews, 1958)

$$\mathcal{R}(r, \lambda) = C_1(\lambda)\mathbf{J}_0(\lambda r) + C_2(\lambda)\mathbf{Y}_0(\lambda r)$$

în care

$$\mathbf{J}_0(\lambda r) = \lim_{\nu\to 0}\mathbf{J}_\nu(\lambda r) = \lim_{\nu\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\lambda r \sin\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\lambda r\sin\omega)d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(\xi\lambda r)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\sin(\omega r)}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(\lambda r \operatorname{ch}\xi)\, d\xi =$$

$$= 1 - \frac{1}{(1\,!)^2}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^4 - \ldots$$

este *funcția lui Bessel de prima speță și ordinul zero*, iar

$$\mathbf{Y}_0(\lambda r) = \lim_{\nu \to 0} \mathbf{Y}_\nu(\lambda r) = \lim_{\nu \to 0} \frac{\mathbf{J}_\nu(\lambda r)\cos \nu\pi - \mathbf{J}_{-\nu}(\lambda r)}{\sin \nu\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial \mathbf{J}_\nu(\lambda r)}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{J}_{-\nu}(\lambda r)}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\mathbf{J}_0(\lambda r)\left[\mathrm{C} + \ln(\lambda r)\right] - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2n}}{(n\,!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

este *funcția lui Bessel de speța a doua și ordinul zero* numită și *funcția lui Neumann* sau *funcția lui Weber de ordinul zero*, unde

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty \xi^n \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}\xi = n\,!, \quad \Gamma(\nu + n + 1) = \int_0^\infty \xi^{\nu+n}\mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}\xi$$

și

$$\mathrm{C} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

reprezintă respectiv *funcția lui Euler de speța a doua* și *constanta lui Euler*, urmează că soluția $\theta(t, r, \lambda) = \mathcal{T}(t, \lambda)\cdot\mathcal{R}(r, \lambda)$ se constituie astfel:

$$\theta(t, r, \lambda) = [C_0 C_1 \mathbf{J}_0(\lambda r) + C_0 C_2 \mathbf{Y}_0(\lambda r)]\mathrm{e}^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t} =$$

$$= [A(\lambda)\mathbf{J}_0(\lambda r) + B(\lambda)\mathbf{Y}_0(\lambda r)]\mathrm{e}^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t}. \qquad (5.51)$$

Dacă se impune soluției (5.51) mai întîi condiția inițială $\theta\,(0, r) = f(r)$ și se ține seamă că funcția $f(r)$ trebuie să fie finită pentru $r = 0$ unde $\lim_{r \to 0} \mathbf{Y}_0(\lambda r) = -\infty$ și deci $B = 0$, iar apoi condiția la limită

$f(R) = 0$ care implică ecuaţia $\mathbf{J}_0(\lambda R) = 0$ cu o infinitate de rădăcini (*zerouri*)

$$\lambda_1 R = 2{,}4048\,; \quad \lambda_2 R = 5{,}5201\,; \quad \lambda_3 R = 8{,}6537\,;$$

$$\lambda_4 R = 11{,}7915\,; \quad \lambda_5 R = 14{,}9309\,; \quad \lambda_6 R = 18{,}0711\,;$$

$$\lambda_7 R = 21{,}2116\,; \quad \lambda_8 R = 24{,}3525\,; \quad \lambda_9 R = 27{,}4935\,;$$

. . . .

şi deci de *valori proprii*

$$\lambda_1 = \frac{2{,}4048}{R}, \quad \lambda_2 = \frac{5{,}5201}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{8{,}6537}{R}, \ldots$$

corespunzătoare soluţiilor particulare

$$\theta_n(t, r) = f_n(r) \cdot e^{-\lambda_n^2 \tilde{\chi} t} = A_n \mathbf{J}_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \tilde{\chi} t},$$

atunci se deduce că soluţia generală are expresia

$$\theta(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{J}_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \tilde{\chi} t} \tag{5.52}$$

cu *coeficienţii Fourier-Bessel* (Carslaw, 1950 ; Tihonov, 1964 ; Iacob et al., 1979)

$$A_n = \frac{\int_0^R \xi f(\xi) \mathbf{J}_0(\lambda_n \xi)\, d\xi}{\int_0^R \xi \mathbf{J}_0^2(\lambda_n \xi)\, d\xi}. \tag{5.53}$$

Valorile uzuale ale funcţiilor $\mathbf{J}_0(\lambda r)$ şi $\mathbf{Y}_0(\lambda r)$ sînt prezentate în tabelul 5.2.

În cazul termoconduţiei axial-simetrice nestaţionare conservative cu fluxul Q invariabil în timp dintr-un neck de rază neglijabilă într-un strat conductiv omogen şi izotrop de grosime M uniformă,

Tabelul 5.2

Valorile uzuale ale funcţiilor lui Bessel de ordinul zero şi speţele întîia şi a doua (după Manualul inginerului, vol. I, 1965)

λr	$J_0(\lambda r)$	$Y_0(\lambda r)$	λr	$J_0(\lambda r)$	$Y_0(\lambda r)$
0,0	+1,0000	$-\infty$	4,5	−0,3205	−0,1947
0,1	+0,9975	−1,5342	4,6	−0,2961	−0,2235
0,2	+0,9900	−1,0811	4,7	−0,2693	−0,2494
0,3	+0,9776	−0,8073	4,8	−0,2404	−0,2723
0,4	+0,9604	−0,6060	4,9	−0,2097	−0,2921
0,5	+0,9385	−0,4445	5,0	−0,1776	−0,3085
0,6	+0,9120	−0,3085	5,1	−0,1443	−0,3216
0,7	+0,8812	−0,1907	5,2	−0,1103	−0,3313
0,8	+0,8463	−0,0868	5,3	−0,0758	−0,3374
0,9	+0,8075	+0,0056	5,4	−0,0412	−0,3402
1,0	+0,7652	+0,0883	5,5	−0,0068	−0,3395
1,1	+0,7196	+0,1622	5,6	+0,0270	−0,3354
1,2	+0,6711	+0,2281	5,7	+0,0599	−0,3282
1,3	+0,6201	+0,2865	5,8	+0,0917	−0,3177
1,4	+0,5669	+0,3379	5,9	+0,1220	−0,3044
1,5	+0,5118	+0,3824	6,0	+0,1506	−0,2882
1,6	+0,4554	+0,4204	6,1	+0,1773	−0,2694
1,7	+0,3980	+0,4520	6,2	+0,2017	−0,2483
1,8	+0,3400	+0,4774	6,3	+0,2238	−0,2251
1,9	+0,2818	+0,4968	6,4	+0,2433	−0,1999
2,0	+0,2239	+0,5104	6,5	+0,2601	−0,1732
2,1	+0,1666	+0,5183	6,6	+0,2740	−0,1452
2,2	+0,1104	+0,5208	6,7	+0,2851	−0,1162
2,3	+0,0555	+0,5181	6,8	+0,2931	−0,0864
2,4	+0,0025	+0,5104	6,9	+0,2981	−0,0563
2,5	−0,0484	+0,4981	7,0	+0,3001	−0,0259
2,6	−0,0968	+0,4813	7,1	+0,2991	+0,0042
2,7	−0,1424	+0,4605	7,2	+0,2951	+0,0339
2,8	−0,1850	+0,4359	7,3	+0,2882	+0,0628
2,9	−0,2243	+0,4079	7,4	+0,2786	+0,0907
3,0	−0,2601	+0,3769	7,5	+0,2663	+0,1173
3,1	−0,2921	+0,3431	7,6	+0,2516	+0,1424
3,2	−0,3202	+0,3071	7,7	+0,2346	+0,1658
3,3	−0,3443	+0,2691	7,8	+0,2154	+0,1872
3,4	−0,3643	+0,2296	7,9	+0,1944	+0,2065
3,5	−0,3801	+0,1890	8,0	+0,1717	+0,2235
3,6	−0,3918	+0,1477	8,1	+0,1475	+0,2381
3,7	−0,3992	+0,1061	8,2	+0,1222	+0,2501
3,8	−0,4026	+0,0645	8,3	+0,0960	+0,2595
3,9	−0,4018	+0,0234	8,4	+0,0692	+0,2662
4,0	−0,3971	−0,0169	8,5	+0,0419	+0,2702
4,1	−0,3887	−0,0561	8,6	+0,0146	+0,2715
4,2	−0,3766	−0,0938	8,7	−0,0125	+0,2700
4,3	−0,3610	−0,1296	8,8	−0,0392	+0,2659
4,4	−0,3423	−0,1633	8,9	−0,0653	+0,2592

(continuare tabel 5.2)

λr	$J_0(\lambda r)$	$Y_0(\lambda r)$	λr	$J_0(\lambda r)$	$Y_0(\lambda r)$
9,0	−0,0903	+0,2499	12,5	+0,1469	−0,1712
9,1	−0,1142	+0,2383	12,6	+0,1626	−0,1551
9,2	−0,1367	+0,2245	12,7	+0,1766	−0,1375
9,3	−0,1577	+0,2086	12,8	+0,1887	−0,1187
9,4	−0,1768	+0,1907	12,9	+0,1988	−0,0989
9,5	−0,1939	+0,1712	13,0	+0,2069	−0,0782
9,6	−0,2090	+0,1502	13,1	+0,2129	−0,0569
9,7	−0,2218	+0,1279	13,2	+0,2167	−0,0352
9,8	−0,2323	+0,1045	13,3	+0,2183	−0,0134
9,9	−0,2403	+0,0804	13,4	+0,2177	+0,0085
10,0	−0,2459	+0,0557	13,5	+0,2150	+0,0301
10,1	−0,2490	+0,0307	13,6	+0,2101	+0,0512
10,2	−0,2496	+0,0056	13,7	+0,2032	+0,0717
10,3	−0,2477	−0,0193	13,8	+0,1943	+0,0913
10,4	−0,2434	−0,0437	13,9	+0,1836	+0,1099
10,5	−0,2366	−0,0675	14,0	+0,1711	+0,1272
10,6	−0,2276	−0,0904	14,1	+0,1570	+0,1431
10,7	−0,2164	−0,1122	14,2	+0,1414	+0,1575
10,8	−0,2032	−0,1326	14,3	+0,1245	+0,1703
10,9	−0,1881	−0,1516	14,4	+0,1065	+0,1812
11,0	−0,1712	−0,1688	14,5	+0,0875	+0,1903
11,1	−0,1528	−0,1843	14,6	+0,0679	+0,1974
11,2	−0,1330	−0,1977	14,7	+0,0476	+0,2025
11,3	−0,1121	−0,2091	14,8	+0,0271	+0,2056
11,4	−0,0902	−0,2183	14,9	+0,0064	+0,2065
11,5	−0,0677	−0,2252	15,0	−0,0142	+0,2055
11,6	−0,0446	−0,2299	15,1	−0,0346	+0,2023
11,7	−0,0213	−0,2322	15,2	−0,0544	+0,1972
11,8	+0,0020	−0,2322	15,3	−0,0736	+0,1902
11,9	+0,0250	−0,2298	15,4	−0,0919	+0,1813
12,0	+0,0477	−0,2252	15,5	−0,1092	+0,1706
12,1	+0,0697	−0,2184	15,6	−0,1253	+0,1584
12,2	+0,0908	−0,2095	15,7	−0,1401	+0,1446
12,3	+0,1108	−0,1986	15,8	−0,1533	+0,1295
12,4	+0,1296	−0,1858	15,9	−0,1650	+0,1132
			16,0	−0,1749	+0,0958

în care temperatura $T = T(t, r)$ satisface condiţia iniţială $T(0, r) = T_\infty = const.$ pentru $r \geqslant 0$ şi condiţiile la limite $\lim_{r \to 0} (-r\partial T/\partial r) = Q/2\pi\varkappa M = const.$ şi $\lim_{r \to \infty} T(t, r) = T_\infty = const.$ pentru $t \geqslant 0$, ecuaţia (5.49) reluată cu $T - T_\infty = \theta(t, r)$ sub forma (5.50) şi cu condiţiile $\theta(0, r) = 0$, $\lim_{r \to 0} [-r\partial\theta(t, r)/\partial r] = Q/2\pi\varkappa M$ şi $\lim_{r \to \infty} \theta(t, r) = 0$ poate

fi integrată prin intermediul *transformatei Laplace*

$$\theta^*(p, r) = \mathcal{L}[\theta(t, r)] = \int_0^\infty \theta(t, r) e^{-pt} dt,$$

întrucît toţi termenii acestei ecuaţii se prezintă ca funcţii «original» în raport cu variabila t. Multiplicînd ecuaţia (5.50) prin e^{-pt} şi integrînd-o în raport cu t de la 0 la ∞, adică

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt} dt - \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial r} e^{-pt} dt - \int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} e^{-pt} dt = 0,$$

unde

$$\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt} dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] = p\theta^*(p, r) - \theta(0, r),$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial r} e^{-pt} dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial \theta}{\partial r}\right] = \frac{d\theta^*}{dr}$$

şi

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} e^{-pt} dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2}\right] = \frac{d^2\theta^*}{dr^2},$$

se obţine, prin impunerea condiţiei iniţiale $\theta(0, r) = 0$, ecuaţia operaţională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}} \theta^* - \frac{1}{r} \frac{d\theta^*}{dr} - \frac{d^2\theta^*}{dr^2} = 0$$

sau

$$r^2 \frac{d^2\theta^*}{dr^2} + r \frac{d\theta^*}{dr} - \frac{p}{\tilde{\chi}} r^2 \theta^* = 0 \qquad (5.54)$$

cu condițiile la limite

$$\int_0^\infty \left[\lim_{r\to 0}\left(-r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)\right] e^{-pt}\,dt = \frac{Q}{2\pi\tilde{\chi} M}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$$

și

$$\int_0^\infty [\lim_{r\to\infty}\theta(t,r)]\, e^{-pt}\,dt = 0$$

preluate sub formele

$$\lim_{r\to 0}\left(-r\frac{d\theta^*}{dr}\right) = \frac{Q}{2\pi\tilde{\chi} M p}$$

și

$$\lim_{r\to\infty}\theta^*(p, r) = 0.$$

Ecuația operațională (5.54) este reprezentată prin *ecuația lui Bessel modificată*

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d^2\theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} + \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\frac{d\theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} - \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2\theta^* = 0$$

cu soluția generală

$$\theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = C_1\mathbf{I}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + C_2\mathbf{K}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)$$

în care $\mathbf{I}_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ și $\mathbf{K}_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ sînt *funcțiile lui Bessel modificate de ordinul zero și speța întîia* și respectiv *a doua*. Potrivit condițiilor la limite

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\frac{d\theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right] = \frac{Q}{2\pi\tilde{\chi} M p}$$

și

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to\infty}\theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = 0,$$

se deduce că $C_1 = 0$ şi $C_2 = Q/(2\pi\tilde{\lambda} Mp)$, deoarece

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to\infty} \mathrm{I}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = \infty$$

şi respectiv

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\frac{\mathrm{dK}_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}{\mathrm{d}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right] =$$

$$= \lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\mathrm{K}_1\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\right] = 1.$$

În consecinţă, soluţia ecuaţiei operaţionale (5.54) se reţine sub forma funcţiei «imagine»

$$\theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = \frac{Q}{2\pi\tilde{\lambda} Mp}\mathrm{K}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\left[\frac{2}{p}\mathrm{K}_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{p}\right)\right] \quad (5.55)$$

căreia îi corespunde, potrivit transformrii 40 din tabelul 4.2, funcţia «original»

$$\theta = T - T_\infty = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\int_{u=r^2/4\tilde{\chi}t}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \quad (5.56)$$

analogă soluţiei pentru curgerea nestaţionară conservativă axial-simetrică sub presiune spre un puţ perfect într-un strat acvifer omogen şi izotrop cu grosime uniformă şi orizontal (Theis, 1935). *Funcţia exponenţială integrală*

$$\int_{u=r^2/4\tilde{\chi}t}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = -\,\mathrm{Ei}\,(-u)$$

poate fi evaluată (vezi tabelul 5.3) prin dezvoltarea

$$\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = \int_u^\infty \frac{1}{u}\left[1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^n}{n!}\right] du =$$

$$= \int_u^\infty \left[\frac{1}{u} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^{n-1}}{n!}\right] du = \left[\ln u + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^n}{n \cdot n!}\right]_u^\infty =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left[\ln u + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^n}{n \cdot n!}\right] - \left[\ln u + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^n}{n \cdot n!}\right],$$

unde

$$-\lim_{u\to\infty}\left[\ln u + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^n}{n \cdot n!}\right] = C$$

reprezintă *constanta lui Euler* (Rothe, 1949), astfel încît soluția (5.56) se mai prezintă sub forma

$$\theta = \frac{Q}{4\pi\tilde{\chi}M}[-\mathrm{Ei}(-u)] = \frac{Q}{4\pi\tilde{\chi}M}\left[-C - \ln u - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-u)^n}{n \cdot n!}\right] \qquad (5.57)$$

în care constanta lui Euler se poate substitui prin valoarea suficient de exactă 0,5772. Pentru valori ale argumentului u suficient de mici ca funcția $-\mathrm{Ei}(-u)$ să poată fi aproximată numai prin primii doi termeni ai dezvoltării sale, adică pentru

$$-\mathrm{Ei}(-u) \approx -0{,}5772 - \ln u = -\ln\frac{4}{2{,}25} - \ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t} = \ln\frac{2{,}25\,\tilde{\chi}t}{r^2},$$

soluția (5.57) se reține prin formula

$$\theta = \frac{Q}{4\pi\tilde{\chi}M}\ln\frac{2{,}25\,\tilde{\chi}t}{r^2} \qquad (5.58)$$

analogă formulei lui Jacob (1950) de aproximare logaritmică a soluției exacte a lui Theis pentru curgerea nestaționară conservativă

Tabelul 5.3

Valorile uzuale ale funcției exponențiale integrale $-\mathrm{Ei}(-u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ **(după Wenzel, 1942; Brown et al., 1972)**

n \ u	n·10⁻¹⁵	n·10⁻¹⁴	n·10⁻¹³	n·10⁻¹²	n·10⁻¹¹	n·10⁻¹⁰	n·10⁻⁹	n·10⁻⁸
1,0	33,9616	31,6590	29,3564	27,0538	24,7512	22,4486	20,1460	17,8435
1,5	33,5561	31,2535	28,9509	26,6483	24,3458	22,0432	19,7406	17,4380
2,0	33,2684	30,9658	28,6632	26,3607	24,0581	21,7555	19,4529	17,1503
2,5	33,0453	30,7427	28,4401	26,1375	23,8349	21,5323	19,2298	16,9272
3,0	32,8629	30,5604	28,2578	25,9552	23,6526	21,3500	19,0474	16,7449
3,5	32,7088	30,4062	28,1036	25,8010	23,4985	21,1958	18,8933	16,5907
4,0	32,5753	30,2727	27,9701	25,6675	23,3649	21,0623	18,7598	16,4572
4,5	32,4575	30,1549	27,8523	25,5497	23,2471	20,9446	18,6420	16,3394
5,0	32,3521	30,0495	27,7470	25,4444	23,1418	20,8392	18,5366	16,2340
5,5	32,2568	29,9542	27,6516	25,3491	23,0465	20,7439	18,4413	16,1387
6,0	32,1698	29,8672	27,5646	25,2620	22,9595	20,6569	18,3543	16,0517
6,5	32,0898	29,7872	27,4846	25,1820	22,8794	20,5768	18,2742	15,9717
7,0	32,0156	29,7131	27,4105	25,1079	22,8053	20,5027	18,2001	15,8976
7,5	31,9467	29,6441	27,3415	25,0389	22,7363	20,4337	18,1311	15,8286
8,0	31,8821	29,5795	27,2769	24,9744	22,6718	20,3692	18,0666	15,7640
8,5	31,8215	29,5189	27,2163	24,9137	22,6112	20,3086	18,0060	15,7034
9,0	31,7643	29,4618	27,1592	24,8566	22,5440	20,2514	17,9488	15,6462
9,5	31,7103	29,4077	27,1051	24,8025	22,4999	20,1973	17,8948	15,5922
n \ u	n·10⁻⁷	n·10⁻⁶	n·10⁻⁵	n·10⁻⁴	n·10⁻³	n·10⁻²	n·10⁻¹	n·10⁰
1,0	15,5409	13,2383	10,9357	8,6332	6,3315	4,0379	1,8229	0,2194
1,5	15,1354	12,8328	10,5303	8,2278	5,9266	3,6374	1,4645	0,1000
2,0	14,8477	12,5451	10,2426	7,9402	5,6394	3,3547	1,2227	0,04890
2,5	14,6242	12,3220	10,0194	7,7172	5,4167	3,1365	1,0443	0,02491
3,0	14,4423	12,1397	9,8371	7,5348	5,2349	2,9591	0,9057	0,01305
3,5	14,2881	11,9855	9,6830	7,3807	5,0813	2,8099	0,7942	0,006970
4,0	14,1546	11,8520	9,5495	7,2472	4,9482	2,6813	0,7024	0,003779
4,5	14,0368	11,7342	9,4317	7,1295	4,8310	2,5684	0,6253	0,002073
5,0	13,9314	11,6289	9,3263	7,0242	4,7261	2,4679	0,5598	0,001148
5,5	13,8361	11,5336	9,2310	6,9289	4,6313	2,3775	0,5034	0,0006409
6,0	13,7491	11,4465	9,1440	6,8420	4,5448	2,2953	0,4544	0,0003601
6,5	13,6691	11,3665	9,0640	6,7620	4,4652	2,2201	0,4115	0,0002034
7,0	13,5950	11,2924	8,9899	6,6879	4,3916	2,1508	0,3738	0,0001155
7,5	13,5260	11,2234	8,9209	6,6190	4,3231	2,0867	0,3403	0,00006583
8,0	13,4614	11,1589	8,8563	6,5545	4,2591	2,0269	0,3106	0,00003767
8,5	13,4008	11,0982	8,7957	6,4939	4,1990	1,9711	0,2840	0,00002162
9,0	13,3437	11,0411	8,7386	6,4368	4,1423	1,9187	0,2602	0,00001245
9,5	13,2896	10,9870	8,6845	6,3828	4,0887	1,8695	0,2387	0,00000718

axial-simetrică sub presiune spre un puț perfect într-un strat acvifer omogen și izotrop cu grosime uniformă și orizontal. Comparînd expresia fluxului de termoconducție dedusă din formula (5.58)

$$Q = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M\theta}{\frac{1}{2}\ln\frac{2{,}25\tilde{\chi}t}{r^2}} = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M\theta}{\ln\frac{1{,}5\sqrt{\tilde{\chi}t}}{r}}$$

cu cea de-a doua expresie din (5.18) a fluxului de termoconducție, se constată că mărimea

$$1{,}5\sqrt{\tilde{\chi}t} = R(t) \tag{5.59}$$

are semnificația unei *raze de influență variabile în timp*. Într-un strat conductiv omogen însă anizotrop cu transmisivitatea termică $(\tilde{\varkappa}M)_r$ variabilă elipsoidal conform ecuației

$$\frac{(\tilde{\varkappa}M)_r^2\cos^2\varphi}{(\tilde{\varkappa}M)_x^2} + \frac{(\tilde{\varkappa}M)_r^2\sin^2\varphi}{(\tilde{\varkappa}M)_y^2} - 1 = 0$$

sau

$$(\tilde{\varkappa}M)_r = \frac{(\tilde{\varkappa}M)_x(\tilde{\varkappa}M)_y}{\sqrt{(\tilde{\varkappa}M)_x^2\sin^2\varphi + (\tilde{\varkappa}M)_y^2\cos^2\varphi}}$$

în care $(\tilde{\varkappa}M)_x$ și $(\tilde{\varkappa}M)_y$ sînt valorile maximă și respectiv minimă ale transmisivității termice după cele două direcții principale de anizotropie, iar φ este unghiul direcției cu transmisivitatea termică $(\tilde{\varkappa}M)_r$ față de direcția cu transmisivitatea termică maximă (fig. 5.5), termoconducția nestaționară conservativă radial-plană se poate asimila termoconducție axial-simetrice corespunzătoare soluției (5.56) printr-o soluție de forma

$$\theta = \frac{Q}{4\pi(\tilde{\varkappa}M)_e}\,[-\mathrm{Ei}(-u_r)], \tag{5.60}$$

unde transmisivitatea termică echivalentă $(\tilde{\varkappa}M)_e$ invariabilă cu direcția se determină prin condiția ca aria cercului de rază $(\tilde{\varkappa}M)_e$ să

fie egală cu aria elipsei de semiaxe $(\varkappa M)_x$ și $(\varkappa M)_y$, adică $\pi(\varkappa M)_e^2 = \pi(\varkappa M)_x (\varkappa M)_y$ și deci

$$(\varkappa M)_e = \sqrt{(\varkappa M)_x (\varkappa M)_y},$$

iar argumentul u_r are expresia

$$u_r = \frac{r^2}{4\tilde{\chi}_r t}$$

cu coeficientul de difuzivitate termică $\tilde{\chi}_r$ dependent de direcție prin intermediul transmisivității termice $(\varkappa M)_r$.

După încetarea unei încălziri neîntrerupte cu fluxul de termoconducție Q presupus constant dintr-un neck singular într-un strat conductiv omogen și izotrop cu dezvoltare uniformă și extindere areală infinită, răcirea în domeniul de influență a neckului se realizează în orice moment t printr-o termoconducție remanentă rezultată, ca și cum afluxul Q ar fi simultan compensat printr-un deflux $-Q$, din compunerea termoconducției inițiale divergente prelungite neîntrerupt din momentul $t = 0$ al începerii încălzirii pînă în momentul t și corespunzătoare soluției (5.56) sau (5.57) reluate sub forma

$$\theta_{(t)} = \frac{Q}{4\pi \varkappa M}\left[-\mathrm{Ei}\left(\frac{-r^2}{4\tilde{\chi} t}\right)\right]$$

cu o termoconducție suplimentară convergentă intervenită pe durata t' din momentul încetării încălzirii pînă în momentul t și corespunzătoare aceleiași soluții (5.56) sau (5.57) preluate însă sub forma

$$Q_{(t')} = \frac{-Q}{4\pi \varkappa M}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi} t'}\right)\right],$$

astfel încît soluția rezultantă $\theta = \theta_{(t)} + \theta_{(t')}$ se prezintă cu expresia

$$\theta = \frac{Q}{4\pi \varkappa M}\left\{\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi} t}\right)\right] - \left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi} t'}\right)\right]\right\}. \quad (5.61)$$

Reținînd valori ale argumentelor $r^2/4\tilde{\chi} t$ și $r^2/4\tilde{\chi} t'$ suficient de mici ca funcțiile corespunzătoare $-\mathrm{Ei}(-r^2/4\tilde{\chi} t)$ și $-\mathrm{Ei}(-r^2/4\tilde{\chi} t')$ să

poată fi aproximate numai prin primii doi termeni ai dezvoltărilor lor, adică

$$\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right)\right]-\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t'}\right)\right]\approx$$

$$\approx\left(-0{,}5772-\ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right)-\left(-0{,}5772-\ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t'}\right),$$

soluția (5.61) se reduce la forma

$$\theta=\frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda}M}\ln\frac{t}{t'}\cdot \tag{5.62}$$

* * *

Pentru termoconducția axial-simetrică nestaționară conservativă cu fluxul Q invariabil în timp dintr-un neck într-un strat conductiv omogen și izotrop de grosime uniformă, soluția (5.56) este deosebit de importantă atît din punct de vedere *practic* prin aplicabilitatea sa la rezolvarea problemelor de încălzire și răcire în domeniul de influență a unui neck, cît și din punct de vedere *teoretic* prin remarcabilitatea sa la fundamentarea unei reprezentări compatibile cu limitarea fizică a vitezei de transmitere a căldurii (Cattaneo, 1958; Gurtin și Pipkin, 1968). În scopul de a releva importanța teoretică a soluției (5.56), se recurge la diferențiala sa

$$\mathrm{d}\theta=\frac{Q\cdot \mathrm{e}^{-u}}{4\pi\tilde{\lambda}M}\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

în care

$$u=u\,(t,r)=\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t},$$

$$\mathrm{d}u=-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t^2}\mathrm{d}t+\frac{r}{2\tilde{\chi}t}\mathrm{d}r$$

și deci

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{2\,\mathrm{d}r}{r}$$

Prin urmare, diferenţiala totală $\mathrm{d}\theta$ se prezintă cu expresiile

$$\mathrm{d}\theta = \frac{Q \cdot \mathrm{e}^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{4\pi\tilde{\chi} M}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{2\,\mathrm{d}r}{r}\right)=$$

$$= -\frac{Q \cdot \mathrm{e}^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{4\pi\tilde{\chi} Mt}\,\mathrm{d}t + \frac{Q \cdot \mathrm{e}^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{2\pi\tilde{\chi} Mr}\,\mathrm{d}r$$

şi

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial\theta}{\partial r}\,\mathrm{d}r$$

din a căror identificare rezultă că

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{Q \cdot \mathrm{e}^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{4\pi\tilde{\chi} Mt}$$

şi

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{Q \cdot \mathrm{e}^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{2\pi\tilde{\chi} Mr},$$

adică

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{r}{2t}\,\frac{\partial\theta}{\partial r}.$$

Substituind în această ultimă egalitate $\partial\theta/\partial t$ prin $(\partial\theta/\partial r)\,(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)$, se deduce relaţia

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{r}{2t} \tag{5.63}$$

stabilită anterior în mecanica apei subterane pentru curgerea nestaţionară conservativă axial-simetrică spre un puţ perfect într-un strat acvifer omogen şi izotrop cu grosime uniformă şi orizontal (Albu, 1981). În cazul termoconducţiei axial-simetrice nestaţionare conservative într-un strat conductiv omogen şi izotrop de grosime M uniformă, modulul vitezei de transmitere a căldurii nu poate fi mai mare decît

o valoare absolută $c = const.$, astfel încît relaţia (5.63) preluată sub forma

$$d(tr^2) = 0$$

sau

$$d(ct \cdot \pi r^2 M) = 0 \tag{5.64}$$

exprimă *invarianţa cvadrivolumului de propagare*

$$\int_0^{ct}\int_0^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{M} (c\,dt)\,dr\,(r\,d\varphi)\,dz = c\int_0^{t} dt\int_0^{r} r\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{M} dz.$$

5.5. Termoconducţia nestaţionară neconservativă

Determinarea termoconducţiei radial-plane nestaţionare neconservative este posibilă prin intermediul unei ecuaţii corespunzătoare (5.2), (5.5), (5.6), (5.9), (5.10), (5.12) sau (5.13) în care temperatura $T(t, r)$ sau diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta(t, r)$ satisfac, de regulă, condiţia iniţială $T(0, r) = T_\infty$ sau $\theta(0, r) = 0$ pentru $r \geqslant 0$ într-un strat conductiv de grosime M precum şi condiţiile la limite $\lim_{r\to 0} [-r\partial T(t, r)/\partial r] = Q/2\pi\tilde{\varkappa} M$ sau $\lim_{r\to 0} [-r\partial \theta(t, r)/\partial r] = Q/2\pi\tilde{\varkappa} M$ şi $\lim_{r\to\infty} T(t, r) = finit\breve{a}$ sau $\lim_{r\to\infty} \theta(t, r) = finit\breve{a}$ pentru $t \geqslant 0$.

În cazul termoconducţiei radial-plane nestaţionare neconservative cu fluxul Q invariabil în timp dintr-un neck de rază neglijabilă într-un strat conductiv omogen şi izotrop de grosime uniformă şi productivitate medie constantă de căldură a unităţii de volum, ecuaţia (5.2) preluată sub forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}} = \text{const.} \tag{5.65}$$

poate fi integrată prin *metoda operaţională a transformatei Laplace* (Wiener, 1926; Delavault, 1957). Potrivit acestei metode, ecuaţia

(5.65) se multiplică prin e^{-pt} şi se integrează în raport cu t de la 0 la ∞, astfel încît se aduce la forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t} e^{-pt}\,dt - \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial r} e^{-pt}\,dt - \int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} e^{-pt}\,dt = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$$

în care

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t} e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = p\,\theta^*(p, r) - \theta(0, r),$$

unde $\theta(0, r) = 0$ prin condiţia iniţială,

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial r} e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\right] = \frac{d\theta^*}{\partial r},$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right] = \frac{d^2\theta^*}{dr^2}$$

şi

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}.$$

Prin urmare, ecuaţia (5.65) se transformă în ecuaţia operaţională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}}\theta^* - \frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{d^2\theta^*}{dr^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa} p}$$

sau

$$r^2\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + r\frac{d\theta^*}{dr} - r^2\left(\frac{p}{\tilde{\chi}}\theta^* - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa} p}\right) = 0 \qquad (5.66)$$

cu condiţiile la limite

$$\lim_{r\to 0}\left[-r\frac{d\theta^*(p, r)}{dr}\right] = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa} M p}$$

şi

$$\lim_{r\to\infty} \theta^*(p, r) = \textit{finită}.$$

Scriind această ecuaţie operaţională sub forma *ecuaţiei lui Bessel modificate*

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d^2(\theta^* - \tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa}p^2)}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} + \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\frac{d(\theta^* - \tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa}p^2)}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} -$$

$$-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2\left(\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2}\right) = 0$$

în care este evidenţiată variabila $(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$, se conchide că soluţia sa generală are expresia

$$\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2} = C_1 \mathbf{I}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + C_2 \mathbf{K}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right),$$

unde $\mathbf{I}_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ şi $\mathbf{K}_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ reprezintă *funcţiile lui Bessel modificate de ordinul zero şi speţa întîia şi respectiv a doua*. Prin impunerea condiţiei ca limita funcţiei

$$\theta^* = C_1 \mathbf{I}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + C_2 \mathbf{K}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\varkappa p^2}$$

să fie finită pentru $(r\sqrt{p/\tilde{\chi}}) \to \infty$ şi a condiţiei date prin $\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0} [-(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\, d\theta^*/d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})] = Q/(2\pi\tilde{\varkappa} M p)$ care implică respectiv $C_1 = 0$ deoarece

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to\infty} \mathbf{I}_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = \infty$$

şi $C_2 = Q/(2\pi\tilde{\varkappa} M p)$ deoarece

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\frac{d\mathbf{K}_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right] = \lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\mathbf{K}_1\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\right] = 1,$$

rezultă că soluţia ecuaţiei operaţionale se exprimă prin funcţia «imagine»

$$\theta^* = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa} M p} K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa} p^2} \tag{5.67}$$

căreia îi corespunde funcţia «original»

$$\theta(t, r) = \mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p, r)] = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{p}\right)\right] + \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]$$

exprimată, potrivit transformărilor 40 şi 14 din tabelul 4.2, sub forma

$$\theta(t, r) = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi} t}\right)\right] + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}\tilde{\chi} t, \tag{5.68}$$

unde

$$-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi} t}\right) = \int_0^t \frac{e^{-r^2/4\tilde{\chi} t}}{t} dt = \int_{r^2/4\tilde{\chi} t}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

În cazul termoconducţiei radial-plane nestaţionare neconservative corespunzătoare ecuaţiei (5.6) cu condiţia iniţială $\theta(0, r) = 0$ pentru $r \geqslant 0$ şi cu condiţiile la limite $\lim_{r \to 0} [-r\partial\theta(t, r)/\partial r] = Q/2\pi\tilde{\varkappa} M$ şi $\lim_{r \to \infty} \theta(t, r) =$ *finită* pentru $t \geqslant 0$, se poate aplica aceeaşi metodă a *transformatei Laplace*, operînd în raport cu variabila t potrivit relaţiilor de transformare

$$\mathcal{L}[\theta(t, r)] = \int_0^{\infty} \theta(t, r) e^{-pt} dt = \theta^*(p, r),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial\theta}{\partial r} e^{-pt} dt = \frac{d\theta^*}{dr},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2\theta^*}{dr^2}$$

şi

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]=\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt}\, dt = p\theta^*(p, r) - \theta(0, r),$$

unde $\theta(0, r) = 0$ prin condiţia iniţială. Ca urmare, din ecuaţia (5.6) se obţine ecuaţia operaţională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}}\theta^* - \frac{1}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{d^2\theta^*}{dr^2} = -\frac{\theta^*}{\tilde{B}^2}$$

sau

$$r^2\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + r\frac{d\theta^*}{dr} - r^2\left(\frac{p}{\tilde{\chi}} + \frac{1}{\tilde{B}^2}\right)\theta^* = 0 \qquad (5.69)$$

cu condiţiile la limite $\lim\limits_{r\to 0}\ [-r\, d\theta^*(p, r)/dr] = Q/(2\pi\tilde{\chi} M p)$ şi $\lim\limits_{r\to\infty} \theta^*(p, r) = finit\breve{a}$. Întrucît ecuaţia (5.69) se poate scrie sub forma *ecuaţiei lui Bessel modificate*

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2\frac{d^2\theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})^2} + \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\frac{d\theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})} -$$

$$-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2\theta^* = 0$$

în care este evidenţiată variabila $(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})$, rezultă că soluţia sa are expresia

$$\theta^* = C_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right) + C_2 K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right),$$

unde $I_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})$ şi $K_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})$ reprezintă ***funcţiile lui Bessel modificate de ordinul zero şi speţa întîia şi respectiv a doua.*** Coeficienţii C_1 şi C_2 se determină prin impunerea condiţiei ca limita funcţiei $\theta^*(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})$ să fie finită pentru $(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}) \to \infty$

şi a condiţiei date prin

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to 0}\left[-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\frac{d\theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})}\right]=\frac{Q}{2\pi\tilde{\chi}M_p}.$$

Impunînd aceste condiţii şi ţinînd seamă că

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to\infty} I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)=\infty$$

şi

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to 0}\left[-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\frac{dK_0(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})}\right]=$$

$$=\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to 0}\left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)K_1\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\right]=1,$$

se găseşte respectiv : $C_1=0$ şi $C_2=Q/(2\pi\tilde{\chi}M_p)$. În consecinţă, soluţia ecuaţiei operaţionale (5.69) este redată prin funcţia «imagine»

$$\theta^*=\frac{Q}{2\pi\tilde{\chi}M_p}K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right) \tag{5.70}$$

căreia îi corespunde funcţia «original»

$$\theta(t,r)=\mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p,r)]=\frac{Q}{4\pi\tilde{\chi}M}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left[2K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{p+\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{B}^2}}\right)\right]\right\}. \tag{5.71}$$

Prin intermediul transformării 39 şi teoremei 3 din tabelul 4.2 potrivit cărora

$$\mathcal{L}^{-1}\left[2K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{p+\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{B}^2}}\right)\right]=e^{-\tilde{\chi}t/\tilde{B}^2}\cdot\frac{e^{-r^2/4\tilde{\chi}t}}{t}$$

precum şi al transformării 8 prezentate pentru integrala originalului în acelaşi tabel, se deduce că soluţia (5.71) este de forma

$$\theta(t, r) = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\int_0^t \frac{e^{-r^2/4\tilde{\chi}t - \tilde{\chi}t/B^2}}{t}\,dt =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\int_{\infty}^{u=r^2/4\tilde{\chi}t} \frac{e^{-u - r^2/4\tilde{B}^2 u}}{u}\,du = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\int_{u=r^2/4\tilde{\chi}t}^{\infty} \frac{e^{-u - r^2/4\tilde{B}^2 u}}{u}\,du$$

sau

$$\theta(t,r) = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\int_{u=r^2/4\tilde{\chi}t}^{\infty} \frac{e^{-X - r^2/4\tilde{B}^2 X}}{X}\,dX = \frac{Q}{4\pi\tilde{\lambda} M}\,F\left(X, \frac{r}{\tilde{B}}\right) \qquad (5.72)$$

analogă cu cea a soluţiei stabilite pentru curgerea nestaţionară neconservativă sub presiune spre un puţ perfect într-un strat acvifer orizontal omogen şi izotrop cu grosime uniformă, extindere areală infinită şi realimentare prin drenanţă corespunzătoare schemei lui Hantush (Hantush şi Jacob, 1955; Verruijt, 1969; Albu, 1970). Soluţia (5.71) se utilizează cu funcţia $\mathbf{F}(\mathbf{X}, r/\tilde{\mathbf{B}})$ evaluată ca în tabelul 5.4 în care ca variabilă X se poate considera de exemplu $1/u = 4\tilde{\chi}t/r^2$.

Dacă termoconducţia radial-plană nestaţionară neconservativă se conformează ecuaţiei (5.12) cu condiţia iniţială $\theta(0, r) = 0$ pentru $r \geqslant 0$ şi cu condiţiile la limite $\lim_{r\to 0}\,[-r\partial\theta(t, r)/\partial r] = Q/2\pi\tilde{\lambda} M$ şi $\lim_{r\to\infty}\theta(t, r) = finită$ pentru $t \geqslant 0$, atunci se poate recurge, de asemenea, la *metoda transformatei Laplace*, operînd în raport cu variabila t potrivit relaţiilor uzuale de transformare

$$\mathcal{L}[\theta(t, r)] = \int_0^{\infty}\theta(t, r)e^{-pt}\,dt = \theta^*(p, r),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\right] = \int_0^{\infty}\frac{\partial\theta}{\partial r}e^{-pt}\,dt = \frac{d\theta^*}{dr},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right] = \int_0^{\infty}\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}e^{-pt}\,dt = \frac{d^2\theta^*}{dr^2}$$

Tabelul 5.4.

Valorile uzuale ale funcției $F\left(X, \frac{r}{\tilde{B}}\right) = \int_{u=r^2/4\tilde{\chi}t}^{\infty} \frac{e^{-X-r^2/4\tilde{B}^2X}}{X} dX$ **(după Hantush, 1956; Emsellem, 1965; 1967)**

X \ $r/\tilde{B}$	0	0,001	0,002	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050
0,143	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,2	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
0,5	0,049	0,049	0,049	0,049	0,049	0,049	0,049	0,049	0,049
1	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219
2	0,56	0,56	0,56	0,56	0,56	0,56	0,56	0,56	0,56
5	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22
10	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82
20	2,47	2,47	2,47	2,47	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46
50	3,35	3,35	3,35	3,35	3,35	3,35	3,34	3,34	3,33
100	4,04	4,04	4,04	4,04	4,04	4,03	4,02	4,00	3,98
200	4,73	4,73	4,73	4,72	4,72	4,71	4,68	4,65	4,61
500	5,64	5,64	5,64	5,64	5,60	5,59	5,53	5,45	5,35
1000	6,33	6,33	6,33	6,33	6,30	6,24	6,12	5,97	5,80
2000	7,02	7,02	7,02	7,01	6,97	6,83	6,62	6,36	6,08
5000	7,94	7,94	7,94	7,91	7,82	7,50	7,07	6,62	6,22
10000	8,63	8,63	8,62	8,57	8,40	7,84	7,21	6,67	6,23
20000	9,33	9,32	9,31	9,21	8,88	8,01	7,25	6,67	6,23
50000	10,24	10,23	10,19	9,95	9,29	8,06	7,25	6,67	6,23
100000	10,94	10,91	10,84	10,39	9,42	8,06	7,25	6,67	6,23
200000	11,63	11,58	11,44	10,68	9,44	8,06	7,25	6,67	6,23
500000	12,54	12,42	12,10	10,82	9,44	8,06	7,25	6,67	6,23
1000000	13,24	13,00	12,44	10,83	9,44	8,06	7,25	6,67	6,23
∞	∞	14,05	12,66	10,83	9,44	8,06	7,25	6,67	6,23

X \ $r/\tilde{B}$	0,075	0,090	0,10	0,20	0,30	0,40	0,45	0,50	0,60
0,143	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,2	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
0,5	0,049	0,049	0,0488	0,0487	0,0485	0,0482	0,0480	0,0477	0,0473
1	0,219	0,219	0,219	0,218	0,216	0,213	0,212	0,210	0,206
2	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,53	0,53	0,52	0,50
5	1,22	1,22	1,22	1,19	1,16	1,11	1,09	1,06	1,00
10	1,81	1,81	1,80	1,75	1,67	1,56	1,50	1,44	1,31
20	2,45	2,43	2,43	2,31	2,14	1,93	1,82	1,71	1,49
50	3,29	3,26	3,24	2,95	2,58	2,18	2,00	1,84	1,55
100	3,91	3,86	3,82	3,29	2,71	2,23	2,02	1,85	1,55
200	4,47	4,37	4,30	3,46	2,74	2,23	2,03	1,85	1,55
500	5,05	4,85	4,71	3,50	2,74	2,23	2,03	1,85	1,55
1000	5,31	5,01	4,83	3,51	2,74	2,23	2,03	1,85	1,55
2000	5,41	5,06	4,85	3,51	2,74	2,23	2,03	1,85	1,55
5000	5,42	5,06	4,85	3,51	2,74	2,23	2,03	1,85	1,55
∞	5,42	5,06	4,85	3,51	2,74	2,23	2,03	1,85	1,55

X \ $r/\tilde{B}$	0,75	0,90	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
0,143	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,2	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0009	0,0008	0,0007	0,0006	0,0004
0,5	0,0463	0,0452	0,0444	0,0395	0,0335	0,0271	0,0210	0,0156	0,0112	0,0051
1	0,200	0,191	0,185	0,151	0,114	0,080	0,053	0,0338	0,0207	0,0073
2	0,48	0,444	0,421	0,301	0,194	0,117	0,068	0,039	0,0223	0,0074
5	0,89	0,79	0,71	0,414	0,227	0,125	0,0695	0,039	0,0223	0,0074
10	1,11	0,93	0,82	0,427	0,228	0,125	0,0695	0,039	0,0223	0,0074
20	1,21	0,97	0,84	0,427	0,228	0,125	0,0695	0,039	0,0223	0,0074
50	1,22	0,97	0,84	0,427	0,228	0,125	0,0695	0,039	0,0223	0,0074
∞	1,22	0,97	0,84	0,427	0,228	0,125	0,0695	0,039	0,0223	0,0074

și

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]=\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = p\,\theta^*(p, r) - \theta(0, r)$$

precum și *teoremei lui Borel* prezentate în tabelul 4.2 prin transformarea 10 aplicată, prin intermediul transformărilor 6 și 24 din același tabel, sub forma

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_\tau (t-\tau)^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]=\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\cdot\mathcal{L}[t^{\lambda-1}\cdot\mathrm{e}^{-\omega t}]=$$

$$=[p\,\theta^*(p, r) - \theta(0, r)]\cdot\frac{\Gamma(\lambda)}{(p+\omega)^\lambda},$$

unde $\theta(0, r) = 0$ prin condiția inițială. Ca urmare a transformării Laplace, din ecuația integrală (5.12) rezultă ecuația operațională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}}\,\theta^* - \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}\theta^*}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}^2\theta^*}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^\lambda\theta^*$$

sau

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\theta^*}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}\theta^*}{\mathrm{d}r}-r^2\left[\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^\lambda\right]\theta^*=0 \qquad (5.73)$$

cu condițiile la limite $\lim\limits_{r\to 0}\ [-r\mathrm{d}\theta^*(p, r)/\mathrm{d}r] = Q/(2\pi\tilde{\chi}Mp)$ și $\lim\limits_{r\to\infty}\theta^*(p, r) = finită$. Prin intermediul variabilei $[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^\lambda/\tilde{\chi}'(p+\omega)^\lambda}]$, ecuația (5.73) se aduce la forma *ecuației lui Bessel modificate*

$$\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^\lambda}\right]^2\frac{\mathrm{d}^2\theta^*}{\mathrm{d}\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^\lambda}\right]^2}+$$

$$+\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^\lambda}\right]\frac{\mathrm{d}\theta^*}{\mathrm{d}\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^\lambda}\right]}-$$

$$-\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]^2\theta^*=0$$

care are soluția

$$\theta^* = C_1\mathbf{I}_0\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]+C_2\mathbf{K}_0\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right],$$

unde $\mathbf{I}_0[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]$ și $\mathbf{K}_0[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]$ sînt *funcțiile lui Bessel modificate de ordinul zero și speța întîia și respectiv a doua.* Impunînd condiția ca limita funcției $\theta^*[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]$ să fie finită pentru $[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]\to\infty$ și condiția la limită dată prin

$$\lim_{[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]\to 0}\left\{-\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]\frac{d\theta^*}{d[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]}\right\}=$$

$$=\frac{Q}{2\pi\tilde{\chi}M p},$$

care implică respectiv $C_1=0$ deoarece

$$\lim_{[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]\to\infty}\mathbf{I}_0\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]=\infty$$

și $C_2=Q/(2\pi\tilde{\chi}Mp)$ deoarece

$$\lim_{[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]\to\infty}\left\{-\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]\frac{d\mathbf{K}_0[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]}{d[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}]}\right\}=$$

$$= \lim_{\left[r\sqrt{p/\tilde{\chi}+p\omega^{\lambda}/\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}\right]\to 0} \left\{\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\, \mathrm{K}_1\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right]\right\}=1,$$

rezultă că soluţia ecuaţiei operaţionale (5.73) se exprimă prin funcţia «imagine»

$$\theta^* = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa} M p}\,\mathrm{K}_0\left[r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{p}{\tilde{\chi}'}\left(\frac{\omega}{p+\omega}\right)^{\lambda}}\right] \tag{5.74}$$

a cărei transformată inversă

$$\theta(t,r)=\mathscr{L}^{-1}[\theta^*(p,r)]=\frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left\{2\mathrm{K}_0\left[\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{p+\frac{\tilde{\chi}\omega^{\lambda}p}{\tilde{\chi}'(p+\omega)^{\lambda}}}\right]\right\}\right\} \tag{5.75}$$

reprezintă soluţia căutată pentru ecuaţia (5.12). În cazul particular în care $\lambda=1$ şi deci termoconducţia radial-plană nestaţionară neconservativă se conformează ecuaţiei (6.13) preluate cu aceeaşi condiţie iniţială $\theta(0,r)=0$ pentru $r\geqslant 0$ şi cu aceleaşi condiţii la limite $\lim_{r\to 0}\,[-r\partial\theta(t,r)/\partial r]=Q/2\pi\tilde{\varkappa} M$ şi $\lim_{r\to\infty}\theta(t,r)=$ *finită* pentru $t\geqslant 0$, soluţia (5.75) devine:

$$\theta(t,r)=\frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left\{2\mathrm{K}_0\left[\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{p+\frac{\tilde{\chi}\omega p}{\tilde{\chi}'(p+\omega)}}\right]\right\}\right\} \tag{5.76}$$

sau

$$\theta(t,r)=\frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left\{2\mathrm{K}_0\left[\frac{r}{\sqrt{\tilde{\chi}}}\sqrt{\frac{\omega p}{(p+\omega)}\left(\frac{p}{\omega}+\frac{\tilde{\chi}+\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}'}\right)}\right]\right\}\right\}.$$

Pentru valori mici ale distanţei r faţă de axa neckului, soluţia (5.76) se poate aproxima (Boulton, 1954, 1963; Stallman, 1962) printr-o soluţie de forma

$$\theta(t,r)=\frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M}\left\{\mathrm{F}\left(\frac{4\tilde{\chi}t}{r^2}\right)-\ln\frac{\tilde{\chi}+\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}'}+\mathrm{F}\left(\frac{1}{\omega t}\right)-\mathrm{F}\left[\frac{\tilde{\chi}'}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\omega t}\right]\right\}. \tag{5.77}$$

Dacă timpul t scurs de la începerea încălzirii are valori foarte mici şi deci diferenţa funcţiilor

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{\omega t}\right)-\mathrm{F}\left[\frac{\tilde{\chi}'}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\omega t}\right]=[-\mathrm{Ei}(-\omega t)]-\left\{-\mathrm{Ei}\left[-\frac{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\omega t}{\tilde{\chi}'}\right]\right\}$$

este foarte apropiată de diferenţa logaritmilor naturali ai argumentelor lor, adică

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{\omega t}\right)-\mathrm{F}\left[\frac{\tilde{\chi}'}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\omega t}\right]\approx \ln\frac{1}{\omega t}-\ln\frac{\tilde{\chi}'}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\omega t}=\ln\frac{\tilde{\chi}+\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}'},$$

atunci soluţia (5.77) se poate reprezenta aproximativ sub forma

$$\theta\approx\frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\,\mathrm{F}\left(\frac{4\tilde{\chi}t}{r^2}\right)=\frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right)\right] \tag{5.78}$$

corespunzătoare soluţiei (5.56) pentru termoconducţia axial-simetrică nestaţionară conservativă într-un strat conductiv cu transmisivitatea termică $\tilde{\varkappa}M$ şi cu difuzivitatea termică $\tilde{\chi}$, iar dacă timpul t are valori foarte mari şi deci diferenţa aceloraşi funcţii este neglijabilă şi funcţia

$$\mathrm{F}\left(\frac{4\tilde{\chi}t}{r^2}\right)=-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right)$$

se aproximează numai prin primii doi termeni ai dezvoltării sale, adică

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{\omega t}\right)-\mathrm{F}\left[\frac{\tilde{\chi}'}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\omega t}\right]\approx 0$$

şi

$$\mathrm{F}\left(\frac{4\tilde{\chi}t}{r^2}\right)=-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right)\approx -0{,}5772-\ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t},$$

atunci soluţia (5.77) se poate reprezenta aproximativ sub forma

$$\theta \approx \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left(-0{,}5772 - \ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t} - \ln\frac{\tilde{\chi}+\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}'}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left[-\ln\frac{4}{2{,}25} - \ln\frac{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')r^2}{4\tilde{\chi}\tilde{\chi}'t}\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\ln\frac{2{,}25\,\tilde{\chi}\tilde{\chi}'t}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\,r^2} = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\ln\frac{2{,}25\,t}{\left(\frac{1}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{\chi}'}\right)r^2} \tag{5.79}$$

corespunzătoare soluţiei (5.58) pentru termoconducţia axial-simetrică nestaţionară conservativă într-un strat conductiv cu transmisivitatea termică $\tilde{\varkappa}M$ şi cu difuzivitatea termică

$$\frac{\tilde{\chi}\tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}+\tilde{\chi}'} = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{\chi}'}}.$$

Între cele două reprezentări apoximative ale soluţiei preluate respectiv sub formele

$$\theta \approx \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right)\right] \approx \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left(-0{,}5772 - \ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left(-\ln\frac{4}{2{,}25} - \ln\frac{r^2}{4\tilde{\chi}t}\right) = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\ln\frac{2{,}25\tilde{\chi}t}{r^2}$$

şi

$$\theta \approx \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\ln\frac{2{,}25\,\tilde{\chi}\tilde{\chi}'\,t}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')\,r^2}$$

se interpune un *palier* mărginit prin momentele t_{st} şi t_ω în care diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta$ tinde să devină staţionară ca în cazul soluţiei (5.72) şi poate fi redată prin aproximările

$$\theta_{st} \approx \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\mathrm{n}\,\frac{2{,}25\tilde{\chi}t_{st}}{r^2} \approx \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\ln\frac{2{,}25\,\tilde{\chi}\tilde{\chi}'t_\omega}{(\tilde{\chi}+\tilde{\chi}')r^2}, \tag{5.80}$$

de unde rezultă :

$$\ln t_\omega - \ln t_{st} = \ln \frac{\tilde{\chi} + \tilde{\chi}'}{\tilde{\chi}'}. \qquad (5.81)$$

Poziţia acestui palier considerat orizontal este marcată prin momentul t_ω corespunzător intersecţiei sale cu reprezentarea aproximativă a soluţiei pentru valori mari ale timpului t şi depinde de mărimea coeficientului ω prin intermediul relaţiei

$$-0{,}5772 - \ln(\omega t_\omega) = 0$$

sau

$$t_\omega = \frac{0{,}561}{\omega}. \qquad (5.82)$$

5.6. Aplicaţii

5.6.1. Într-un strat conductiv orizontal cu transmisivitatea termică constantă de 10 W/°K încălzit practic staţionar de un neck care îl străpunge perpendicular, se înregistrează valori ale temperaturii de 560°K şi 455°K la distanţele de 100 m şi respectiv 300 m faţă de neck. Presupunînd că termoconducţia este conservativă, să se calculeze fluxul de căldură dinspre neck şi raza de influenţă termică a acestuia în stratul conductiv a cărui parte neinfluenţată îşi menţine temperatura de referinţă de 380°K.

Rezolvare. Din aplicarea formulelor (5.18) şi (5.19) în care $\tilde{\chi}M = 10$ W/°K, $\theta_1 = T_1 - T_\infty = 560$°K $- 380$°K $= 180$°K, $\theta_2 = T_2 - T_\infty = 455$°K $- 380$°K $= 75$°K, $r_1 = 100$ m şi $r_2 = 300$ m, rezultă respectiv :

$$Q = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot (180 - 75)}{\ln \dfrac{300}{100}} = 6005{,}16 \text{ W}$$

şi

$$\ln R = \frac{180 \cdot \ln 300 - 75 \cdot \ln 100}{180 - 75} = 6{,}4885$$

sau

$$R = 657{,}54 \text{ m}.$$

5.6.2. Un neck vertical străpunge o succesiune de trei strate orizontale cu conductibilități termice de 2,61 W/m·°K, 3,05 W/m.°K, 1,94 W/m.°K și respectiv cu grosimi de 10 m, 5 m, 8 m. Presupunînd că termoconducția laterală dinspre neck se menține staționară conservativă și cunoscînd că la distanțele de 100 m și 200 m influența termică a neckului se manifestă prin creșteri ale temperaturii de 100°K și respectiv 94°K, să se determine fluxul de termoconducție laterală axial-simetrică prin cele trei strate.

Rezolvare. Potrivit formulei (5.28) preluate sub forma

$$Q = \frac{2\pi(\varkappa_{I}M_{I} + \varkappa_{II}M_{II} + \varkappa_{III}M_{III})}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}(\theta_1 - \theta_2)$$

în care $\varkappa_I = 2{,}61$ W/m.°K, $\varkappa_{II} = 3{,}05$ W/m.°K, $\varkappa_{III} = 1{,}94$ W/m.°K, $M_I = 10$ m, $M_{II} = 5$ m, $M_{III} = 8$ m, $r_1 = 100$ m, $r_2 = 200$ m, $\theta_1 = 100$°K și $\theta_2 = 94$°K, se găsește că fluxul de termoconducție laterală axial-simetrică dinspre neck prin cele trei strate are valoarea

$$Q = \frac{2\pi(2{,}61 \cdot 10 + 3{,}05 \cdot 5 + 1{,}94 \cdot 8)}{\ln\dfrac{200}{100}}(100 - 94) = 3093{,}064 \text{ W}.$$

5.6.3. În condițiile termoconducției axial-simetrice staționare neconservative dinspre un neck vertical într-un strat orizontal omogen și izotrop cu conductibilitatea termică de 2,50 W/m.°K, să se calculeze productivitatea medie a unității de volum, știind că temperatura prezintă creșterile de 154,00 °K, 150,00°K și 143,02°K la distanțele de 200 m, 300 m și respectiv 500 m față de neck.

Rezolvare. Aplicînd succesiv formula (5.35) pentru intervalele de la r_1 la r_2 și de la r_2 al r_3, se deduce:

$$\frac{Q}{\pi M} - \tilde{\mu} r_0^2 = \frac{2\tilde{\varkappa}(\theta_1 - \theta_2) - \dfrac{\tilde{\mu}}{2}(r_2^2 - r_1^2)}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} =$$

$$= \frac{2\tilde{\varkappa}(\theta_2 - \theta_3) - \dfrac{\tilde{\mu}}{2}(r_3^2 - r^2)}{\ln\dfrac{r_3}{r_2}}$$

şi deci

$$\tilde{\mu} = 4\tilde{\varkappa}\,\frac{\dfrac{\theta_2 - \theta_3}{\ln(r_3/r_2)} - \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{\ln(r_2/r_1)}}{\dfrac{r_3^2 - r_2^2}{\ln(r_3/r_2)} - \dfrac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}}.$$

Întrucît $\tilde{\varkappa} = 2{,}50$ W/m.°K, $\theta_1 = 154{,}00$ °K, $\theta_2 = 150{,}00$°K, $\theta_3 = 143{,}02$°K, $r_1 = 200$ m, $r_2 = 300$ m şi $r_3 = 500$ m, urmează că

$$\tilde{\mu} = 4 \cdot 2{,}50\,\frac{\dfrac{150{,}00 - 143{,}02}{\ln(500/300)} - \dfrac{154{,}00 - 150{,}00}{\ln(300/200)}}{\dfrac{500^2 - 300^2}{\ln(500/300)} - \dfrac{300^2 - 200^2}{\ln(300/200)}} = 2{,}00046 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^3}.$$

5.6.4. Să se determine factorul de neconservativitate pentru termoconducţia radial-plană staţionară neconservativă datorită unui neck cu raza neglijabilă dinspre care se emite fluxul de 4000 W într-un strat cu conductibilitatea termică de 1,97 W/m.°K şi cu grosimea de 10 m, cunoscînd că la distanţa de 210 m faţă de neck influenţa termică a acestuia este reprezentată printr-o creştere a temperaturii de 0,04 °K.

Rezolvare. Prin aplicarea formulei (5.42) preluate sub forma

$$\mathrm{K}_0\left(\frac{r}{\tilde{\mathrm{B}}}\right) = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}M}{Q}\,\theta$$

în care $r = 210$ m, $\tilde{\varkappa} = 1{,}97$ W/m.°K, $M = 10$ m, $Q = 4000$ W şi $\theta = 0{,}04$ °K, se obţine

$$\mathrm{K}_0\left(\frac{210}{\tilde{\mathrm{B}}}\right) = \frac{2\pi \cdot 1{,}97 \cdot 10 \cdot 0{,}04}{4000} = 0{,}00124.$$

Potrivit valorilor înscrise în tabelul 5.1, se găseşte că

$$\frac{210}{\tilde{\mathrm{B}}} = 6{,}0$$

şi deci

$$\tilde{B} = \frac{210}{6,0} = 35 \text{ m}.$$

5.6.5. Să se evalueze fluxul de termoconducţie nestaţionară conservativă dintr-un neck activ într-un strat conductiv cu transmisivitatea termică constantă de 30 W/°K şi cu difuzivitatea termică constantă de $1,5 \cdot 10^{-6}$ m²/s, ştiind că la distanţa de 100 m faţă de neck influenţa acestuia creşte, în curs de 50 ani, de la 1°K la 2°K.

Rezolvare. Prin intermediul formulei (5.58) aplicate pentru o aceeaşi distanţă r, dar pentru două momente diferite t_1 şi t_2, adică

$$\theta_1 = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M} \ln \frac{2,25\tilde{\chi}t_1}{r^2}$$

şi

$$\theta_2 = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}M} \ln \frac{2,25\tilde{\chi}t_2}{r^2},$$

se deduce că

$$t_2 - t_1 = \frac{r^2}{2,25\tilde{\chi}}\left(e^{\frac{4\pi\tilde{\varkappa}M\theta_2}{Q}} - e^{\frac{4\pi\tilde{\varkappa}M\theta_1}{Q}}\right)$$

sau

$$e^{\frac{4\pi\tilde{\varkappa}M\theta_2}{Q}} - e^{\frac{4\pi\tilde{\varkappa}M\theta_1}{Q}} = \frac{2,25\tilde{\chi}(t_2 - t_1)}{r^2}.$$

Utilizînd valorile $\tilde{\varkappa}M = 30$ W/°K, $\tilde{\chi} = 1,5 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $r = 100$ m, $t_2 - t_1 = 50$ ani $= 50 \cdot 365,25 \cdot 86400 = 1,57788 \cdot 10^9$ s, $\theta_1 = 1$°K şi $\theta_2 = 2$°K, se obţine ecuaţia

$$\left(e^{\frac{376,99}{Q}}\right)^2 - e^{\frac{376,99}{Q}} = 0,5325$$

cu soluţiile

$$e^{\frac{376,99}{Q}} = \begin{cases} 1,3846, \\ -0,3846 \end{cases}$$

dintre care se reține ca acceptabilă numai prima longaritmată sub forma

$$\frac{376{,}99}{Q} = 0{,}3254,$$

de unde rezultă:

$$Q = 1158{,}54 \text{ W}.$$

5.6.6. La 50 de ani după încetarea încălzirii neîntrerupte cu fluxul de termoconducție de 3000 W presupus constant dintr-un neck vertical într-un strat orizontal omogen și izotrop cu conductibilitatea termică de 2,10 W/m. °K și cu grosimea uniformă de 15 m, întru-un punct dat al stratului se resimte încă influența termică a neckului marcată printr-o creștere a temperaturii de 10,5°K. Să se estimeze durata de încălzire neîntreruptă a stratului de la formarea neckului pînă la începerea răcirii sale.

Rezolvare. Durata de încălzire neîntreruptă a stratului de la formarea neckului pînă la începerea răcirii sale este dată de diferența dintre timpul t scurs de la începerea încălzirii și timpul t' scurs de la încetarea încălzirii. Potrivit formulei (5.62) preluată sub forma

$$\theta = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa} M} \ln \frac{(t - t') + t'}{t'}$$

sau

$$t - t' = t'\left(e^{\frac{4\pi\tilde{\varkappa}M}{Q}\theta} - 1\right)$$

în care $t' = 50$ ani $= 1{,}57788 \cdot 10^9$s, $\tilde{\varkappa} = 2{,}10$ W/m. °K, $M = 15$ m, $Q = 3000$ W și $\theta = 10{,}5$°K, se găsește că

$$t - t' = 1{,}57788 \cdot 10^9 \cdot \left(e^{\frac{4\pi \cdot 2{,}10 \cdot 15}{3000} \cdot 10{,}5} - 1\right) = 4{,}72826 \cdot 10^9 \text{s} \approx 149{,}83 \text{ ani}.$$

Bibliografie

ALBU, M. (1970). *Drenanța în regimul apelor subterane,* Hidrotehnica, vol. 15, nr. 4, p. 202—208, București.

ALBU, .M (1981). *Mecanica apelor subterane,* Cap. 5, p. 162—163, Editura tehnică, București.

ALDIS, W. S. (1894). In: Proceedings of the Royal Society, vol. **LXIV**.

BASSET, A. B. (1888). *A Treatise on Hydrodynamics* (tom. 2), Hydrodynamics, II, p. 19, Cambridge.

BASSET, A. B. (1889). *On the Potentials of the surfaces formed by the revolution of Limaçons and Cardioids about their axes* (25 Oct., 1886), Proc. Camb. Phil. Soc. **VI**, p. 2—19.

BIRCH, F., CLARCK, H. (1940). *The thermal conductivity of rocks and its dependence upon temperature and composition,* Am. J. Sci., **238**, p. 529—558, 613—635.

BOULTON, N. S. (1954). *Unsteady radial flow to a pumped well allowing for delayed yield from storage,* I.A.S.H. Publ. **37**, p. 472—477, Brussels.

BOULTON, N. S. (1963). *Analysis of data from non-equilibrium pumping tests allowing for delayed yield from storage,* Proc. Inst. Civ. Engrs., vol. **26**, p. 469—482.

BRILLA, J. (1962). *Contact Problems of an Elastic Anisotropic Half-Plane,* Rev. mec. appl., vol. **7**, N3.

BROWN, R. H., KONOPLYANTSEV, A. A., INESON, J., KOVALEVSKY, V. S. (1972). *Ground-water studies,* Appendix E, p. 1, UNESCO, Paris.

CARSLAW, H. S., (1950). *An introduction to the theory of Fourier's series and integrals* (third revised edition), Dover Publications, Inc., New York.

CATTANEO, G. (1958). *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée,* C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, **247**, 431.

CHURCHILL, R. V. (1958). *Operational Mathematics,* 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

DELAVAULT, H. (1957). *Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques,* Paris.

DOMAȘOV, V. P. (1975 a). *Smeșannaia zadacea termouprugosti dlia anizotropnoi poluploskosti,* «RJ Meh.», No. **9**, V 68, DEP.

DOMAȘOV, V. P. (1975 b). *Smeșannaia zadacea termouprugosti dlia anizotropnoi ploskosti s ellipticeskim otverstiem,* «RJ Meh.», No. **6**, V 81, DEP.

EMSELLEM, Y. (1965). *L'interprétation des essais de débit des nappes souterraines par la méthode d'identification,* Annales des Mines Fr., **6**, p. 375—380.

EMSELLEM, Y. (1967). *Les transferts de pression entre nappes et la drainance dans les ensembles aquifères hétérogènes,* Chronique d'Hydrogéologie no. **11**, p. 142, B.R.G.M. Paris.

GRAY, A., MATHEWS, G. B. (1958). *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică* (trad. din limba engleză după ediția a doua, revăzută de A. Gray și T. M. Macrobert), Cap. II, p. 22—34, Cap. III, p. 35—38, Cap. V, p. 85—87, Cap. XI, p. 172—175, Cap. XVI, p. 305—321, Editura tehnică, București.

GRILIȚKII, D. V., POPOVICI, B. I. (1971). In: Konțentrațiia napriajenii, vîp. 3, *Smeșannaia granicinaia zadacea termouprugosti dlia anizotropnoi plastinki s ellipticeskim otverstiem,* «Naukova dumka», Kiev.

GURTIN, M. E., PIPKIN, A. C. (1968). *A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds,* Arch. Rat. Mech. Anal., **31**, 113.

HANTUSH, M. S. (1956). *Analysis of data from pumping tests in leaky aquifers,* Trans. Am. Geophys. Union **37**, 6, p. 702—714.

HANTUSH, M. S., JACOB, C. E. (1955). *Nonsteady radial flow in an infinite leaky aquifer and nonsteady Green's functions for an infinite strip of leaky aquifer,* Trans. Am. Geophys. Union **36**, p. 95—112.

IACOB, C., CRĂCIUNESCU, A., CRISTEA, C., DRAGOŞ, L., GHEORGHIŢĂ, ST. I., TRANDAFIR, R. (1979). *Matematici clasice şi moderne*, vol. II, Cap. XI, p. 404—453, Editura tehnică, Bucureşti.

ILIUŞIN, A. A., POBEDRIA, B. E. (1970). *Osnovi matematiceskoi teorii termoviazkouprugosti*, M., «Nauka».

JACOB, C. E. (1950). In : Engineering Hydraulics (ed. H. Rouse), Chap. 5, p. 321—386, John Wiley and Sons, New York.

KIRCHHOFF, G. (1854). *Über den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen*, Journal für Math., **XLVIII**, p. 348—376.

KOVALENKO, A. D. (1970). *Osnovi termouprugosti*, «Naukova dumka», Kiev.

KUMMER, E. E. (1837). *De integralibus quibusdam difinitis et seriebus infinitis*, Journal für Math. **XVII**, p. 228—242.

LAWTON, R. G., MURPHY, H. D., TESTER, J. W., McFARLAND, R. D. (1980). *Geothermal reservoir modeling*, 7-ème Symposium international de L'A.I.H.R.— Transfers de chaleur et de masse en milieu poreux, p. 116—143, Stanford University — Stanford, CA 94305 U.S.A.

LIPSCHITZ, R.O.S. (1859). *Über ein Integral der Differentialgleichung* $\partial^2 I/\partial x^2 + (1/x)\partial I/\partial x + I = 0$, Journal für Math., **LVI**, p. 189—196.

LOMMEL, E.C.J. (1868). *Studien über die Bessel'schen Funktionen*, p. 2—7, Leipzig.

LOMMEL, E. C. J. (1871). *Zur Theorie der Bessel'schen Funktionen*, Math. Ann. **IV**, p. 103—116.

MACDONALD, H. M. (1899). *Zeroes of the Bessel Functions*, Proc. London Math. Soc. **XXX**, p. 165—179.

MEHLER, F. G. (1881). *Über eine mit den Kugel-und Cilinderfunktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in die Theorie der Electricitätsvertheilung*, Math. Ann., **XVIII**, p. 161—194.

NICHOLSON, J. W. (1911). *Notes on Bessel Functions*, Quarterly Journal, **XLII**, p. 216—224.

NOVAŢKII, V. (1975). *Teoriia uprugosti*, M., «Mir».

PODSTRIGACI, IA. S., KOLIANO, IU. M. (1972). *Neustanovivşiesia temperaturnîe polia i napriajeniia v tonkih plastinkah*, «Naukova dumka», Kiev.

PODSTRIGACI, IA. S., KOLIANO, IU. M. (1976). *Obobşcennaia termomehanika*, «Naukova dumka», Kiev.

PRUSOV, I. A. (1976). *Ob odnom novom predstavlenii obşcih formul termouprugosti dlia anizotropnoi poluploskosti i anizotropnoi ploskosti s razrezami*, «Vesţi AN BSSR, Ser. fiz.—mat. navuk», No. 3.

PRUSOV, I. A. (1978). *Termouprughe anizot ropnîe plastinki*, Glava 2, p. 23—30, Glava 3, p. 94—97, Izdatelistvo BGU im. V. I. Lenina, Minsk.

PRUSOV, I. A., SAVENKOV, V. A. (1977). *Predstavlenie obşcih formul termouprugosti dlia spaiannih anizotropnîh poluploskostei s razrezami na linii spaia*, Dep., VINITI, No. **1830—77**.

PRUSOV, I. A., SOLODUHA, I. S. (1977). *Kontaktnîe zadaci termouprugosti o davlenii ştampa na anizotropnuiu poluploskosti pri nepolnom sţeplenii*, Tezisî doklada na Vsesoiuznoi konferenţii «Smeşannîe zadaci mehaniki deformiruemogo tela», Rostov n/D.

PRUSOV, I. A., VASILEVICI, IU. V. (1977). *Ob odnom reşenii smeşannoi zadaci termouprugosti dlia anizotropnoi ploskosti s ellipticeskim otverstiem*, «Vestn. Belorussk. un-ta. Ser. 1», No. 1.

ROTHE, R. (1949). *Matematici superioare* (trad. din limba germană după ediţia a doua, 1932), vol. II, § 48, p. 148—149, Oficiul de presă, editură şi documentare C.F.R., Bucureşti.

SAINT-VENANT, B. (1865). *Memoire sur les divers genres d'homogeneite des corps solides*, Journal de Math. pures et appl., t. 10, Liouville.

SAVIN, G. N., GRILIŢKII, D. V. (1968). *Kontaktnaia zadacea termouprugosti dlia anizotropnoi poluploskosti*, «PM», t. 4, vip. 5.
STALLMAN, R. W. (1962). *Boulton's integral for pumping test analysis*, United States Geol. Survey, Prof. paper, 424—C, C24—29.
STIELTJES, T. J. (1886). *Recherches sur quelques séries sémi-convergentes*, Ann. Sci. de l'École norm. sup. (3), III, p. 201—258.
THEIS, C. V. (1935). *The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water strage*, Trans. Am. Geophys. Union, 16, p. 519—524.
THOMSON, W. (KELVIN), (1890). *Ether, Electricity and Ponderable Matter*, Math. and Phys. Papers, III, p. 484—515.
TIHONOV, A. N. (1964). *Ob ustoicivîh metodah summirovaniia readov Fourier*, Dokladî Ak. Nauk S.S.S.R., tom. 156, nr. 2, p. 268—271.
UZDALEV, A. I. (1967). *Nekotorîe zadaci termouprugosti anizotropnogo tela*, Izd-vo Saratovskogo un-ta, Saratov.
UZDALEV, A. I. (1975). *Temperaturnîe napriajeniia v plastinkah, ogranicennîh dvuhsviaznîm konturom*, Izd-vo Saratovskogo un-ta, Saratov.
VERRUIJT, A. (1969). In : Flow through porous media (ed. R. J. M. De Wiest), Chap. 8, *Elastic Storage of Aquifers*, p. 331—376, Academic Press, New York and London.
VOIGT, W. (1886). *Ueber die Elastizitätsverhältnisse cylindrisch aufgebauter Körper*, Nachrichten v. d. Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und d. Georg-Augustin Universität zu Göttingen, N 16, Göttingen.
WATSON, G. N. (1949). *Teoriia besselevîh funkţii*, Ceasti pervaia (Perevod so 2-go angliiskogo izdaniia), Glava III, p. 48—94, Glava VI, p. 202, Glava VII, p. 233—239, Glava XIII, p. 466—490, Izdatelistvo inostrannoi literaturi, Moskva.
WENZEL, L. K. (1942). *Methods for determining permeability of water-bearing materials, with special reference to discharging-well methods*, with a section on direct laboratory methods and bibliography on permeability and laminar flow, by V. C. Fishel, United States Geol. Survey, Water-supply paper, 887.
WIENER, N. (1926). *The operational calculs*, Math. Ann. 95, p. 557—584.
* * * (1965). *Manualul inginerului* (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Matematica-Fizica*, Cap. I, Tabele matematice, p. 125—128, Editura tehnică, Bucureşti.

«In consecinţă, orice declaraţie asupra celor ce ''s-au petrecut în realitate'' este o declaraţie în termeni de concepte clasice şi — din cauza termodinamicii şi a relaţiilor de incertitudine — incompletă în sine în ceea ce priveşte detaliile fenomenelor în cauză.»

WERNER HEISENBERG

6. Termoconducţia radial-sferică

6.1. Ecuaţiile fundamentale

În coordonate sferice (fig. 6.1), ecuaţia lui Fourier (3.37) se scrie sub forma

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(-\tilde{\varkappa}\,\mathrm{r}^2\frac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(-\tilde{\varkappa}\sin\vartheta\,\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\tilde{\varkappa}\,\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)=\tilde{\mu} \qquad (6.1)$$

în care coeficienţii $\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}$, $\tilde{\varkappa}$ şi $\tilde{\mu}$ depind, în general, de timp, de coordonatele $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}\vartheta$, $\mathbf{r}\varphi\sin\vartheta$ şi de temperatura T (Zeldovitch şi Kompaneets, 1950).

În cazul pătrunderii magmei sub sau între formaţiuni preexistente (de exemplu, la formarea unui *lacolit*), termoconducţia dinspre corpul intrusiv spre rocile înconjurătoare poate fi, cel puţin provizoriu şi local pe un sector limitat, radial-sferică şi deci raportabilă la un sistem de coordonate sferice al cărui centru coincide cu centrul sursei magmatice a corpului intrusiv.

Pentru termoconducţia radial-sferică în care temperatura depinde numai de timp şi de coordonata sferică r, deci în care $\partial T/\partial \vartheta = 0$ şi $\partial T/\partial \varphi = 0$, ecuaţia (6.1) se prezintă sub forma

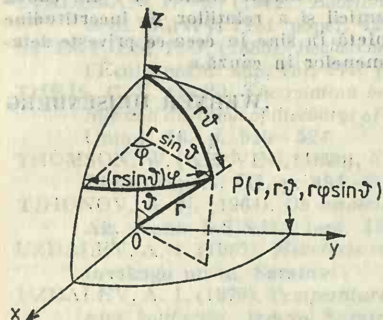


Fig. 6.1. Schema de principiu a sistemului de coordonate sferice

$$\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa}\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \tilde{\mu}(t, r, T), \qquad (6.2)$$

unde este evidenţiată, potrivit legii lui Fourier (3.20) densitatea fluxului de termoconducţie radial-sferică

$$-\tilde{\varkappa} \frac{\partial T}{\partial r} = \tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}}\, T\, \tilde{w}_r = \tilde{q}_r,$$

iar pentru termoconducţia în care conductibilitatea termică se menţine invariabilă în raport cu coordonata r, adică $\partial \tilde{\varkappa}/\partial r = 0$, ecuaţia (6.2) devine:

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}} \qquad (6.3)$$

sau

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}, \qquad (6.3')$$

unde $\tilde{\chi} = \tilde{\varkappa}/\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}}$ reprezintă coeficientul de difuzivitate termică.

Dacă pe frontiera domeniului de termoconducţie radial-sferică temperatura este dată printr-o funcţie $T_\infty(t, r)$ care satisface ecuaţia omogenă

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial T_\infty}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial T_\infty}{\partial r} - \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial r^2} = 0$$

şi în interiorul acestui domeniu termenul $\tilde{\mu}/\tilde{\varkappa}$ variază proporţional cu diferenţa de temperatură $T - T_\infty = \theta$ prin intermediul unui coeficient negativ $-1/\tilde{B}^2$, atunci ecuaţia (6.3′) se transpune sub forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = -\frac{\theta}{\tilde{B}^2}. \qquad (6.4)$$

6.2. Termoconducţia staţionară conservativă

În domeniul de influenţă termică a unui lacolit, termoconducţia radial-sferică se poate presupune, cel puţin temporar şi local, ca fiind staţionară conservativă cu condiţiile $\partial T/\partial t = 0$ şi $\tilde{\mu} = 0$ sau, mai general, numai cu condiţia $(1/\tilde{\chi})\partial T/\partial t = \tilde{\mu}/\tilde{\varkappa}$, astfel încît ecuaţia (6.3) se poate reţine, pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial \mathrm{r})\mathrm{dr}$, sub forma

$$\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}}\right) = 0. \tag{6.5}$$

În cazul termoconducţiei radial-sferice cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit activ într-un sector semisferic omogen şi izotrop (fig. 6.2), densitatea fluxului de termoconducţie $-\tilde{\varkappa}\mathrm{d}T/\mathrm{dr}$ poate fi exprimată prin raportul dintre fluxul Q şi aria $2\pi\mathrm{r}^2$ a suprafeţei semisferei de rază r, adică

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}} = \frac{Q}{2\pi\,\mathrm{r}^2}. \tag{6.6}$$

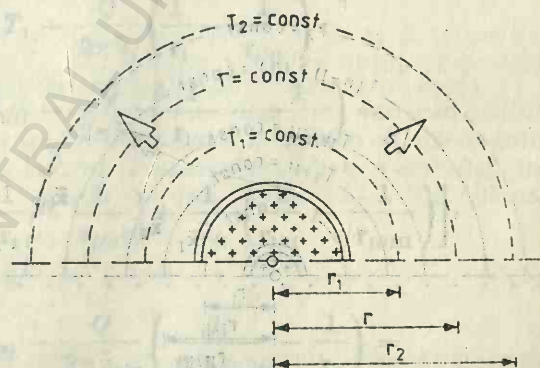


Fig. 6.2. Termoconducţia radial-sferică într-un sector semisferic omogen şi izotrop

Preluînd ecuaţia (6.6) sub forma

$$\mathrm{d}T = -\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}^2}$$

şi integrînd mai întîi de la r_1 la r şi respectiv de la T_1 la T sau de la r la r_2 şi respectiv de la T la T_2, iar apoi de la r_1 la r_2 şi respectiv de la

T_1 la T_2, rezultă formulele ecuației de variație a temperaturii

$$T = T_1 - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = T_2 + \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{6.7}$$

și fluxului de termoconducție

$$Q = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}(T_1 - T_2)}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} \tag{6.8}$$

analoge formulelor cunoscute în hidraulica subterană pentru curgerea radial-sferică staționară conservativă dinspre o sursă punctuală într-un sector semisferic (Cristea, 1956 ; Crețu et al., 1966 ; Gheorghiță, 1966).

În cazul termoconducției radial-sferice cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit într-un sector semisferic care prezintă variații dis-

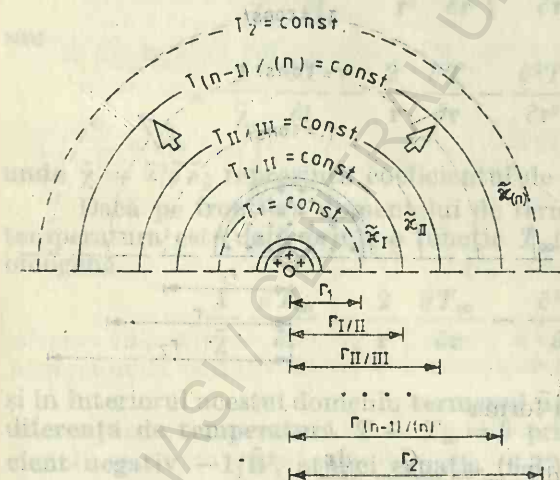


Fig. 6.3. Termoconducția radial-sferică într-un sector semisferic care prezintă variații discontinue de conductibilitate termică după suprafețe semisferice concentrice în centrul sursei magmatice

continue de conductibilitate termică după suprafețe semisferice concentrice în centrul sursei magmatice a lacolitului (fig. 6.3),

adică

$$\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(\mathrm{r}) = \begin{cases} \tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}} = const. \text{ pentru } \mathrm{r}_1 \leqslant \mathrm{r} < \mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}, \\ \tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}} = const. \text{ pentru } \mathrm{r}_{\mathrm{I/II}} \leqslant \mathrm{r} < \mathrm{r}_{\mathrm{II/III}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\varkappa}_{(n)} = const. \text{ pentru } \mathrm{r}_{(n-\mathrm{I})/(n)} \leqslant \mathrm{r} < \mathrm{r}_2, \end{cases}$$

ecuația (6.6) poate fi reluată succesiv după cum urmează:

$$-2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}}\right)_{\mathrm{I}} = -2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}}\right)_{\mathrm{II}} = \dots$$

$$\dots = -2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)}\left(\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}}\right)_{(n)} = Q = const. \tag{6.9}$$

Prin integrarea fiecăreia dintre ecuațiile (6.9) pe intervalul corespunzător de la r_1 la $\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}$, de la $\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}$ la $\mathrm{r}_{\mathrm{II/III}}$, ... și de la $\mathrm{r}_{(n-\mathrm{I})/(n)}$ la r_2 pe care temperatura variază respectiv de la T_1 la $T_{\mathrm{I/II}}$, de la $T_{\mathrm{I/II}}$ la $T_{\mathrm{II/III}}$, ... și de la $T_{(n-\mathrm{I})/(n)}$ la T_2, se obțin formulele

$$T_{\mathrm{I/II}} = T_1 - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}}\right),$$

$$T_{\mathrm{II/III}} = T_{\mathrm{I/II}} - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}} - \frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{II/III}}}\right) =$$

$$= T_1 - \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}}\right) + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}} - \frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{II/III}}}\right)\right],$$

. . . .

$$T_2 = T_{(n-\mathrm{I})/(n)} - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}_{(n)}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_{(n-\mathrm{I})/(n)}} - \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right) =$$

$$= T_1 - \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{I}}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}}\right) + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{\mathrm{II}}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{I/II}}} - \frac{1}{\mathrm{r}_{\mathrm{II/III}}}\right) + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}\left(\frac{1}{\mathrm{r}_{(n-\mathrm{I})/(n)}} - \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)\right]. \tag{6.10}$$

Din ultima formulă (6.10) se deduce că fluxul de termoconducție radial-sferică are expresia (Davidescu, 1965)

$$Q = \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\tilde{\varkappa}_I}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{I/II}}\right) + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{II}}\left(\frac{1}{r_{I/II}} - \frac{1}{r_{II/III}}\right) + \ldots + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}\left(\frac{1}{r_{(n-I)/(n)}} - \frac{1}{r_2}\right)} \tag{6.11}$$

asemănătoare cu expresia (6.8) prin intermediul relației

$$\tilde{\varkappa}_{med} = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{\tilde{\varkappa}_I}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{I/II}}\right) + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{II}}\left(\frac{1}{r_{I/II}} - \frac{1}{r_{II/III}}\right) + \ldots + \frac{1}{\tilde{\varkappa}_{(n)}}\left(\frac{1}{r_{(n-I)/(n)}} - \frac{1}{r_2}\right)}. \tag{6.12}$$

6.3. Termoconducția staționară neconservativă

Dacă în domeniul de influență termică a unui lacolit temperatura se menține staționară sau cel puțin cvasistaționară și productivitatea medie de căldură a unității de volum depinde numai de coordonata sferică r și de temperatură, atunci ecuația (6.2) se prezintă, pentru $dT = (\partial T/\partial r)dr$, sub forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-\tilde{\varkappa} r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \tilde{\mu}(r, T) \tag{6.13}$$

corespunzătoare termoconducției radial-sferice staționare neconservative. Într-un domeniu omogen și izotrop (Carslaw și Jaeger, 1959; Tye, 1969; Taitel, 1972), termoconducția radial-sferică staționară neconservativă se conformează ecuației (Davidescu, 1965; Pollack, 1965)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}. \tag{6.14}$$

În cazul termoconducţiei radial-sferice cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit de rază r_0 într-un sector semisferic de conductibilitate termică $\tilde{\varkappa} = const.$ şi productivitate medie de căldură a unităţii de volum $\tilde{\mu} = const.$, se convine ca ecuaţia (6.14) să fie preluată sub forma

$$d\left(-r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}} r^2 dr \qquad (6.15)$$

cu condiţia la limită

$$\lim_{r \to r_0} \left(-r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}}. \qquad (6.16)$$

Integrînd ecuaţia (6.15) de la r_0 la r şi respectiv de la $Q/2\pi\tilde{\varkappa}$ la $-r^2dT/$ $/dr$, rezultă că

$$-r^2 \frac{dT}{dr} - \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}} = \frac{\mu}{3\tilde{\varkappa}}(r^3 - r_0^3)$$

sau

$$dT = -\frac{1}{\tilde{\varkappa}}\left[\left(\frac{Q}{2\pi} - \frac{\tilde{\mu}\, r_0^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\tilde{\mu}}{3\tilde{\varkappa}} r\right] dr. \qquad (6.17)$$

Printr-o nouă integrare de la r_0 la r sau de la r_1 la r_2 şi respectiv de la T_0 la T sau de la T_1 la T_2, din ecuaţia (6.17) se obţin formulele pentru ecuaţia de variaţie a temperaturii

$$T = T_0 - \frac{1}{\tilde{\varkappa}}\left[\left(\frac{Q}{2\pi} - \frac{\tilde{\mu}\, r_0^3}{3}\right)\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \frac{\tilde{\mu}}{6}(r^2 - r_0^2)\right] \qquad (6.18)$$

şi pentru fluxul de termoconducţie

$$Q = 2\pi\left[\frac{\tilde{\varkappa}(T_0 - T) - \frac{\tilde{\mu}}{6}(r^2 - r_0^2)}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}} + \frac{\tilde{\mu} r_0^3}{3}\right] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\tilde{\varkappa}(T_1 - T_2) - \frac{\tilde{\mu}}{6}(r_2^2 - r_1^2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} + \frac{\tilde{\mu} r_0^3}{3}\right]. \qquad (6.19)$$

În cazul termoconducției radial-sferice staționare neconservative cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic de conductibilitate termică $\tilde{\varkappa} = const.$ și extindere presupusă infinită în care productivitatea medie de căldură a unității de volum este direct proporțională cu diferența de temperatură $T - T_\infty = T(\mathrm{r}) - \lim\limits_{\mathrm{r}\to\infty} T(\mathrm{r}) = \theta(\mathrm{r})$ și invers proporțională cu pătratul factorului $\tilde{\mathrm{B}} = const.$, ecuația (6.4) se scrie, pentru $\mathrm{d}T = (\partial T/\partial \mathrm{r})\mathrm{dr}$, sub forma

$$-\frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dr}} - \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dr}^2} = -\frac{\theta}{\tilde{\mathrm{B}}^2}$$

sau

$$\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dr}^2} + 2\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dr}} - \frac{\mathrm{r}^2}{\tilde{\mathrm{B}}^2}\theta = 0 \tag{6.20}$$

cu condițiile la limite

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\theta(\mathrm{r}) = \textit{finită}$$

și

$$\lim_{\mathrm{r}\to 0}\left[-\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}\theta(\mathrm{r})}{\mathrm{dr}}\right] = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}}. \tag{6.21}$$

Prin schimbarea de funcție (Gray și Mathews, 1958; Sabac, 1965)

$$\theta = \mathrm{r}^{-1/2}\Theta$$

care implică

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dr}} = \mathrm{r}^{-1/2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{dr}} - \frac{1}{2}\mathrm{r}^{-3/2}\Theta$$

și

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dr}^2} = \mathrm{r}^{-1/2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{dr}^2} - \mathrm{r}^{-3/2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{dr}} + \frac{3}{4}\mathrm{r}^{-5/2}\Theta,$$

ecuația (6.20) se aduce la forma

$$\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{dr}^2} + \mathrm{r}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{dr}} - \left(\frac{\mathrm{r}^2}{\tilde{\mathrm{B}}^2} + \frac{1}{4}\right)\Theta = 0,$$

iar prin introducerea variabilei $r/\tilde{B}$ această ecuaţie se reprezintă conform *ecuaţiei lui Bessel modificate*

$$\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^2 \frac{d^2\Theta}{d(r/\tilde{B})^2} + \left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\frac{d\Theta}{d(r/\tilde{B})} - \left[\left(\frac{r^2}{\tilde{B}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\Theta = 0$$

cu soluţia generală

$$\Theta\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = A\, I_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) + B\, K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right),$$

unde

$$I_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \lim_{m\to 0} I_{m+(1/2)}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) =$$

$$= \lim_{m\to 0}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi r/\tilde{B}}}\left[e^{r/\tilde{B}}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n (m+n)!}{n!(m-n)!(2r/\tilde{B})^n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{m+1} e^{-r/\tilde{B}}\sum_{n=0}^{m}\frac{(m+n)!}{n!(m-n)!(2r/\tilde{B})^n}\right]\right\}$$

şi

$$K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \lim_{m\to 0} K_{m+(1/2)}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) =$$

$$= \lim_{m\to 0}\left[\left(\frac{\pi}{2r/\tilde{B}}\right)^{1/2} e^{-r/\tilde{B}}\sum_{n=0}^{m}\frac{(m+n)!}{n!(m-n)!(2r/\tilde{B})^n}\right] = \left(\frac{\pi}{2r/\tilde{B}}\right)^{1/2} e^{-r/\tilde{B}}$$

sînt *funcţiile lui Bessel modificate de ordinul 1/2 şi speţa întîia şi* respectiv *a doua* (Watson, 1949). Revenind la funcţia $\theta = r^{-1/2}\Theta = \tilde{B}^{-1/2}(r/\tilde{B})^{-1/2}\Theta$ şi preluînd soluţia generală sub forma

$$\theta\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \tilde{B}^{-1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^{-1/2}\left[A\, I_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) + B\, K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\right]$$

cu condiţiile la limite :

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to\infty} \theta\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \textit{finită}$$

și

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left[-\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^2 \frac{d\theta(r/\tilde{B})}{d(r/\tilde{B})}\right] = \frac{Q}{2\pi\varkappa\tilde{B}},$$

se deduce că $A = 0$ deoarece

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to\infty}\left[\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^{-1/2} I_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\right] = \infty$$

și $B = Q/(\pi\varkappa\sqrt{2\pi\tilde{B}})$ deoarece

$$\lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left\{-\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^2 \frac{d[(r/\tilde{B})^{-1/2} K_{1/2}(r/\tilde{B})]}{d(r/\tilde{B})}\right\} =$$

$$= \lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left\{-\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^2 \frac{d[(\pi/2)^{1/2}(r/\tilde{B})^{-1} e^{-r/\tilde{B}}]}{d(r/\tilde{B})}\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left\{-\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^2\left[-\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^{-2} e^{-r/\tilde{B}} - \left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^{-1} e^{-r/\tilde{B}}\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{(r/\tilde{B})\to 0}\left[e^{-r/\tilde{B}}\left(1 + \frac{r}{\tilde{B}}\right)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

În consecință, pentru ecuația (6.20) se reține soluția

$$\theta = \frac{Q}{\pi\varkappa\sqrt{2\pi\tilde{B}r}} K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \frac{Q}{2\pi\varkappa}\frac{e^{-r/\tilde{B}}}{r} \qquad (6.22)$$

în care funcția

$$K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2r/\tilde{B}}}\, e^{-r/\tilde{B}}$$

are valorile uzuale prezentate în tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

Valorile uzuale ale funcției lui Bessel modificate de speța a doua și ordinul 1/2

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_{1/2}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
0,1	3,586167	5,1	0,003384
0,2	2,294489	5,2	0,003032
0,3	1,695161	5,3	0,002717
0,4	1,328349	5,4	0,002436
0,5	1,075047	5,5	0,002184
0,6	0,887989	5,6	0,001959
0,7	0,743883	5,7	0,001757
0,8	0,629621	5,8	0,001576
0,9	0,537123	5,9	0,001414
1,0	0,461068	6,0	0,001268
1,1	0,397777	6,1	0,001138
1,2	0,344600	6,2	0,001022
1,3	0,299575	6,3	0,000917
1,4	0,261206	6,4	0,000823
1,5	0,228335	6,5	0,000739
1,6	0,200045	6,6	0,000664
1,7	0,175604	6,7	0,000596
1,8	0,154416	6,8	0,000535
1,9	0,135995	6,9	0,000481
2,0	0,119938	7,0	0,000432
2,1	0,105909	7,1	0,000388
2,2	0,093627	7,2	0,000349
2,3	0,082855	7,3	0,000313
2,4	0,073392	7,4	0,000282
2,5	0,065066	7,5	0,000253
2,6	0,057731	7,6	0,000228
2,7	0,051261	7,7	0,000205
2,8	0,045547	7,8	0,000184
2,9	0,040496	7,9	0,000165
3,0	0,036026	8,0	0,000149
3,1	0,032068	8,1	0,000134
3,2	0,028559	8,2	0,000120
3,3	0,025447	8,3	0,000108
3,4	0,022684	8,4	0,000097
3,5	0,020230	8,5	0,000088
3,6	0,018049	8,6	0,000079
3,7	0,016109	8,7	0,000071
3,8	0,014383	8,8	0,000064
3,9	0,012846	8,9	0,000057
4,0	0,011478	9,0	0,000052
4,1	0,010258	9,1	0,000046
4,2	0,009171	9,2	0,000042
4,3	0,008201	9,3	0,000038
4,4	0,007336	9,4	0,000034
4,5	0,006563	9,5	0,000030
4,6	0,005874	9,6	0,000027
4,7	0,005258	9,7	0,000025
4,8	0,004708	9,8	0,000022
4,9	0,004216	9,9	0,000020
5,0	0,003777	10,0	0,000018

6.4. Termoconducția nestaționară conservativă

În absența surselor interioare de căldură din domeniul de influență termică a unui lacolit semisferic, termoconducția radial-sferică în acest domeniu se conformează ecuației

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\tilde{\varkappa} r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \qquad (6.23)$$

obținute prin particularizarea ecuației (6.2) pentru $\tilde{\mu} = 0$. Dacă domeniul de influență termică a lacolitului este omogen și izotrop astfel încît $\partial\tilde{\varkappa}/\partial r = 0$, atunci ecuația (6.23) se prezintă, evidențiind coeficientul de difuzivitate termică $\tilde{\varkappa}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}} = \tilde{\chi}$, sub forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tilde{\chi}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(-r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0. \qquad (6.24)$$

Pentru un lacolit a cărui influență termică se extinde de la centrul sursei magmatice pînă la distanța R într-un sector semisferic cu temperatura pe frontieră $T(t, R) = T_\infty$ menținută constantă sau variabilă conform ecuației (6.24), se poate introduce ca funcție diferența de temperatură $T(t, r) - T_\infty = \theta(t, r)$ și deci ecuația (6.24) devine:

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = 0. \qquad (6.25)$$

Această ecuație poate fi integrată prin *metoda separării variabilelor* (Iordache și Smigelschi, 1981), căutînd o soluție $\theta = \theta(t, r) = \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{R}(r)$ care să satisfacă ecuația (6.25)

$$\frac{\mathcal{R}}{\tilde{\chi}} \frac{d\mathcal{T}}{dt} - \frac{2}{r} \mathcal{T} \frac{d\mathcal{R}}{dr} - \mathcal{T} \frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} = 0$$

și separînd variabilele în expresii egale cu o aceeași valoare reținută ca negativă pentru a fi acceptabilă din punct de vedere fizic, adică

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathcal{T}} \frac{d\mathcal{T}}{dt} = \frac{2}{r\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{dr} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} = -\lambda^2.$$

Prin urmare, se obține o ecuație diferențială ordinară de ordinul întîi

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} + \lambda^2\tilde{\chi}\,\mathcal{T} = 0$$

cu soluția

$$\mathcal{T}(t, \lambda) = C_0(\lambda)e^{-\lambda^2\tilde{\chi}t}$$

și o *ecuație de tip Bessel*

$$r^2\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} + 2r\,\frac{d\mathcal{R}}{dr} + \lambda^2 r^2\mathcal{R} = 0$$

care prin schimbarea de funcție $\mathcal{R} = r^{-1/2}\mathcal{R}_*$ se aduce la forma

$$r^2\frac{d^2\mathcal{R}_*}{dr^2} + r\,\frac{d\mathcal{R}_*}{dr} + \left(\lambda^2r^2 - \frac{1}{4}\right)\mathcal{R}_* = 0$$

sau

$$(\lambda r)^2\,\frac{d^2\mathcal{R}_*}{d(\lambda r)^2} + (\lambda r)\,\frac{d\mathcal{R}_*}{d(\lambda r)} + \left[(\lambda r)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathcal{R}_* = 0$$

cu soluția generală

$$\mathcal{R}_*(\lambda r) = C_1(\lambda)\,\mathbf{J}_{1/2}(\lambda r) + C_2(\lambda)\,\mathbf{Y}_{1/2}(\lambda r) = C_1(\lambda)\,\mathbf{J}_{1/2}(\lambda r) - C_2(\lambda)\mathbf{J}_{-1/2}(\lambda r)$$

sau

$$\mathcal{R}(r, \lambda) = r^{-1/2}\left[C_1(\lambda)\left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2}\sin\lambda r - C_2(\lambda)\left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2}\cos\lambda r\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left[C_1(\lambda)\,\frac{\sin\lambda r}{r} - C_2(\lambda)\,\frac{\cos\lambda r}{r}\right],$$

unde sînt utilizate egalitățile (Sabac, 1965; Iacob et al., 1981)

$$\mathbf{Y}_{1/2}(\lambda r) = -\mathbf{J}_{-1/2}(\lambda r),$$

$$\mathbf{J}_{1/2}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda r)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}}\sin\lambda r$$

și

$$J_{-1/2}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \cos \lambda r.$$

Soluția $\theta(t, r, \lambda) = \mathcal{T}(t, \lambda) \cdot \mathcal{R}(r, \lambda)$ se reține deci cu expresia

$$\theta(t, r, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \left(C_0 C_1 \frac{\sin \lambda r}{r} - C_0 C_2 \frac{\cos \lambda r}{r} \right) e^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \left[A(\lambda) \frac{\sin \lambda r}{r} - B(\lambda) \frac{\cos \lambda r}{r} \right] e^{-\lambda^2 \tilde{\chi} t}. \quad (6.26)$$

Dacă, în domeniul de influență termică a lacolitului, diferența de temperatură $\theta(t, r)$ satisface condiția inițială $\theta(0, r) = f(r)$ pentru $0 \leqslant r \leqslant R$ și condițiile la limite $\theta(t, 0) = \textit{finită}$ și $\theta(t, R) = 0$ pentru $t \geqslant 0$, atunci din (6.26) se deduce că $B = 0$, $\lambda_n = n\pi/R$ și deci

$$\theta_n(t, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}} A_n e^{-\lambda_n^2 \tilde{\chi} t} \frac{\sin \lambda_n r}{r} =$$

$$= \sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}} \frac{A_n}{r} e^{-\frac{n^2\pi^2}{R^2} \tilde{\chi} t} \sin \frac{n\pi r}{R},$$

astfel încît soluția $\theta(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t, r)$ a ecuației (6.25) este de forma

$$\theta(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}} \frac{A_n}{r} e^{-\frac{n^2\pi^2}{R^2} \tilde{\chi} t} \sin \frac{n\pi r}{R}. \quad (6.27)$$

În această soluție, coeficienții $\sqrt{2R/n\pi^2}\, A_n$ se determină, potrivit condiției inițiale, prin *funcția impară*

$$r\theta(0, r) = rf(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}} A_n \sin \frac{n\pi r}{R}$$

a cărei expresie trebuie să fie identică cu dezvoltarea ei în *serie Fourier* pe intervalul de la 0 la R (Jackson, 1941; Stuart, 1961) și

implicit

$$\sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}}\,A_n = \frac{2}{R}\int_0^R \xi f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{R}\,\mathrm{d}\,\xi$$

sau

$$A_n = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{n}{2R}}\int_0^R \xi f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{R}\,\mathrm{d}\,\xi. \qquad (6.28)$$

Dacă diferența de temperatură $\theta(t, \mathrm{r})$ satisface condiția inițială $\theta(0, \mathrm{r}) = f(\mathrm{r})$ pentru $0 \leqslant \mathrm{r} \leqslant R$ și condițiile la limite

$$\lim_{\mathrm{r}\to 0}\left[\theta(t, \mathrm{r}) + \mathrm{r}\,\frac{\partial\theta(t, \mathrm{r})}{\partial \mathrm{r}}\right] = \lim_{\mathrm{r}\to 0}\left\{\frac{\partial[\mathrm{r}\cdot\theta(t, \mathrm{r})]}{\partial \mathrm{r}}\right\} = 0 \text{ și } \lim_{\mathrm{r}\to R}\theta(t, \mathrm{r}) = 0$$

pentru $t \geqslant 0$, atunci din soluția (6.26) și din derivata parțială în raport cu r a produsului $\mathrm{r}\cdot\theta(t, \mathrm{r})$ preluată sub forma

$$\frac{\partial[\mathrm{r}\cdot\theta(t, \mathrm{r})]}{\partial \mathrm{r}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,[A(\lambda)\cos\lambda\mathrm{r} + B(\lambda)\sin\lambda\mathrm{r}]\,\mathrm{e}^{-\lambda^2\tilde{\chi}t}$$

rezultă că $A = 0$ și $\lambda_n = (2n+1)\pi/2R$, adică

$$\theta_n(t, \mathrm{r}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}}\,B_n\,\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\tilde{\chi}t}\cdot\frac{\cos\lambda_n\mathrm{r}}{\mathrm{r}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\cdot\frac{B_n}{\mathrm{r}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4R^2}\tilde{\chi}t}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi\mathrm{r}}{2R},$$

unde $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Însumînd soluțiile particulare $\theta_n(t, \mathrm{r})$ se obține soluția căutată

$$\theta(t, \mathrm{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\theta_n(t, \mathrm{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\,\frac{B_n}{\mathrm{r}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4R^2}\tilde{\chi}t}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi\mathrm{r}}{2R} \qquad (6.29)$$

în care coeficienții $-(2/\pi)\sqrt{R/(2n+1)}B_n$ se determină prin intermediul condiției inițiale transpuse sub forma *funcției pare*

$$r\theta(0, r) = rf(r) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\, B_n \cos\frac{(2n+1)\pi r}{2R}$$

cu expresia corespunzătoare unei *dezvoltări în serie Fourier* pe intervalul de la 0 la R, astfel încît

$$-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\, B_n = \frac{2}{R}\int_0^R \xi f(\xi) \cos\frac{(2n+1)\pi\xi}{2R}\, d\xi$$

sau

$$B_n = -\frac{\pi}{R}\sqrt{\frac{2n+1}{R}}\int_0^R \xi f(\xi) \cos\frac{(2n+1)\pi\xi}{2R}\, d\xi. \qquad (6.30)$$

În cazul termoconducției radial-sferice nestaționare conservative cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic omogen și izotrop cu extindere presupusă nelimitată în care temperatura $T(t, r)$ satisface condiția inițială $T(0, r) = T_\infty = const.$ pentru $0 \leqslant r < \infty$ și condițiile la limite

$$\lim_{r\to 0}\left[-r^2\frac{\partial T(t, r)}{\partial r}\right] = \frac{Q}{2\pi\varkappa} \text{ și } \lim_{r\to\infty} T(t, r) = \textit{finită}$$

pentru $t \geqslant 0$, ecuația (6.24) preluată cu notația $T - T_\infty = \theta(t, r)$ sub forma (6.25) și cu condițiile $\theta(0, r) = 0$, $\lim\limits_{r\to 0}[-r^2\partial\theta(t, r)/\partial r] = Q/2\pi\varkappa$ și $\lim\limits_{r\to\infty}\theta(t, r) = \textit{finită}$ se poate integra prin *metoda operațională a transformatei Laplace* (Doetsch și Herschel, 1961; Kîrlov și Skoblia, 1968; Jaeger și Newstead, 1971). Potrivit acestei metode, se operează în raport cu variabila t prin relațiile

$$\mathcal{L}[\theta(t, r)] = \int_0^\infty \theta(t, r)\, e^{-pt}\, dt = \theta^*(p, r),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t} e^{-pt}\, dt = p\theta^*(p, r) - \theta(0, r),$$

și

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial r} e^{-pt}\, dt = \frac{d\theta^*}{dr}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} e^{-pt}\, dt = \frac{d^2\theta^*}{dr^2}$$

prin care ecuația (6.25) cu condiția inițială $\theta(0, r) = 0$ se transformă în ecuația operațională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}}\theta^* - \frac{2}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{d^2\theta^*}{dr^2} = 0$$

sau

$$r^2\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + 2r\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{p}{\tilde{\chi}}r^2\theta^* = 0, \qquad (6.31)$$

iar condițiile sale la limite devin :

$$\lim_{r\to 0}\left[-r^2\frac{d\theta^*(p, r)}{dr}\right] = \frac{Q}{2\pi\tilde{\chi}p}$$

și

$$\lim_{r\to\infty}\theta^*(p, r) = \textit{finită}.$$

Recurgînd la schimbarea de funcție $\theta^* = r^{-1/2}\Theta^*$ și ținînd seamă că

$$\frac{d\theta^*}{dr} = r^{-1/2}\frac{d\Theta^*}{dr} - \frac{1}{2}r^{-3/2}\Theta^*$$

și

$$\frac{d^2\theta^*}{dr^2} = r^{-1/2}\frac{d^2\Theta^*}{dr^2} - r^{-3/2}\frac{d\Theta^*}{dr} + \frac{3}{4}r^{-5/2}\Theta^*,$$

ecuația (6.31) se aduce la forma *ecuației lui Bessel modificate*

$$r^2 \frac{d^2 \Theta^*}{dr^2} + r \frac{d\Theta^*}{dr} - \left(\frac{p}{\tilde{\chi}} r^2 + \frac{1}{4} \right) \Theta^* = 0$$

sau

$$\left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d^2\Theta^*}{d(r \sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} + \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) \frac{d\Theta^*}{d(r \sqrt{p/\tilde{\chi}})} - \left[\left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \Theta^* = 0$$

care are soluția generală

$$\Theta^* \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) = A\, I_{1/2} \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) + B K_{1/2} \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right),$$

unde $I_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ și $K_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ sînt *funcțiile lui Bessel modificate de ordinul 1/2 și spața întîia și* respectiv *a doua*. Dacă se revine la funcția $\theta^* = r^{-1/2}\,\Theta^*$ prin care soluția generală se transcrie sub forma

$$\theta^* \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) = \left(\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right)^{1/2} \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right)^{-1/2} \left[A\, I_{1/2} \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) + B K_{1/2} \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) \right] \tag{6.32}$$

și se impun condițiile la limite

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}}) \to 0} \left[-\left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right)^2 \frac{d\,\theta^*(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} \right] = \frac{Q}{2\pi \tilde{\varkappa}\, p} \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}$$

și

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}}) \to \infty} \theta^* \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) = \mathit{finită},$$

atunci se găsește că $A = 0$ și $B = Q/(\pi \tilde{\chi} p \sqrt{2\pi \sqrt{\tilde{\varkappa}/p}})$ deoarece

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}}) \to \infty} \left[\left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right)^{-1/2} I_{1/2} \left(r \sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}} \right) \right] = \infty$$

şi respectiv

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2\frac{d[(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^{-1/2}K_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right\}=$$

$$=\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2\frac{d[(\pi/2)^{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^{-1}\,e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}\left(1+r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ca urmare, soluţia ecuaţiei operaţionale (6.31) este reprezentată prin funcţia «imagine»

$$\theta^*=\frac{Q}{\pi\tilde{\varkappa}p\sqrt{2\pi r\sqrt{\tilde{\chi}/p}}}K_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)=\frac{Q\cdot e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}}{2\pi\tilde{\varkappa}\,p\,r}$$

sau

$$\theta^*(p,r)=\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}r}\cdot\frac{e^{-(r/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}}}{p} \tag{6.33}$$

căreia îi corespunde, potrivit transformării 33 din tabelul 4.2, funcţia «original» $\theta(t, r) = \mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p, r)]$ cu expresia

$$\theta(t,r)=\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}r}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)=$$

$$=\frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}r}\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{r/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})}e^{-\xi^2}d\xi\right]=\frac{Q}{\pi\tilde{\varkappa}r\sqrt{\pi}}\int_{r/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi. \tag{6.34}$$

Această expresie a distribuţiei temperaturii se poate compara cu cele deduse prin alte metode şi cu alte condiţii la limite pentru termoconducţia radial-sferică nestaţionară conservativă în medii presupuse infinite, semiinfinite sau finite (Landau şi Lifchitz, 1971 ; Mikhaïlov, 1980).

6.5. Termoconducţia nestaţionară neconservativă

Ecuaţiile termoconducţiei radial-sferice nestaţionare neconservative se prezintă, de regulă, sub formele (6.2), (6.3) sau (6.4) cu condiţii date prin valorile funcţiei $T(t, \mathrm{r})$ sau $\theta(t, \mathrm{r})$ la un moment iniţial pe domeniul de termoconducţie şi prin valorile funcţiei (de *tip Dirichlet*) sau ale derivatei sale normale (de *tip Neumann*) sau încă ale unei combinaţii liniare a funcţiei şi derivatei sale normale (de *tip Fourier*) la limitele domeniului pe durata termoconducţiei.

În cazul termoconducţiei radial-sferice nestaţionare neconservative cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic omogen şi izotrop cu extindere presupusă nelimitată în care creşterea de temperatură $T(t, \mathrm{r}) - T(0, \mathrm{r}) = T(t, \mathrm{r}) - T_\infty = \theta(t, \mathrm{r})$ satisface ecuaţia (6.3′) preluată sub forma

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{r}^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}, \tag{6.35}$$

cu condiţia iniţială $\theta(0, \mathrm{r}) = 0$ pentru $0 \leqslant \mathrm{r} \leqslant \infty$ şi cu condiţiile la limite $\lim\limits_{\mathrm{r}\to 0} [-\mathrm{r}^2\partial\theta(t, \mathrm{r})/\partial\mathrm{r}] = Q/2\pi\tilde{\varkappa}$ şi $\lim\limits_{\mathrm{r}\to\infty} \theta(t, \mathrm{r}) = finită$ pentru $t \geqslant 0$, se poate utiliza *metoda operaţională a transformatei Laplace* (Widder, 1946; Parodi, 1948; Jeffreys şi Jeffreys, 1950; Thomson, 1950; Wagner, 1950; Haller, 1953; Ascoli, 1956; Churchill, 1956; Ditkin şi Prudnikov, 1974), multiplicînd ecuaţia (6.35) prin e^{-pt} şi apoi integrînd-o în raport cu t de la 0 la ∞ după cum urmează:

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t} e^{-pt}\,dt - \frac{2}{\mathrm{r}}\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial\mathrm{r}} e^{-pt}\,dt - \int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial\mathrm{r}^2} e^{-pt}\,dt = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt.$$

Prin intermediul relaţiilor

$$\int_0^\infty \theta(t, \mathrm{r}) e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}\,[\theta(t, \mathrm{r})] = \theta^*(p, \mathrm{r}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t} e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] = p\,\theta^*(p, \mathrm{r}) - \theta(0, \mathrm{r}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial r} e^{-pt}\, dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial \theta}{\partial r}\right] = \frac{d\theta^*}{dr},$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} e^{-pt}\, dt = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2}\right] = \frac{d^2 \theta^*}{dr^2}$$

şi

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \mathcal{L}\,[1] = \frac{1}{p}$$

precum şi al condiţiei iniţiale $\theta(0, r) = 0$, ecuaţia (6.35) se transformă în ecuaţia operaţională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}}\theta^* - \frac{2}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{d^2\theta^*}{dr^2} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa} p}$$

sau

$$r^2 \frac{d^2\theta^*}{dr^2} + 2r\frac{d\theta^*}{dr} - r^2\frac{p}{\tilde{\chi}}\left(\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa} p^2}\right) = 0 \tag{6.36}$$

cu condiţiile la limite $\lim\limits_{r\to 0}\,[-r^2 d\theta^*(p, r)/dr] = Q/(2\pi\tilde{\varkappa} p)$ şi $\lim\limits_{r\to\infty}\theta^*(p, r) =$ $= finit\breve{a}$. Întrucît $d(p/\tilde{\chi})/dr = 0$ şi $d(\tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa} p^2)/dr = 0$, urmează că ecuaţia (6.36) poate fi reluată sub forma

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d^2\,[\theta^* - (\tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa} p^2)]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} + 2\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\frac{d[\theta^* - (\tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa} p^2)]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} -$$

$$-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2\left(\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa} p^2}\right) = 0 \tag{6.37}$$

cu condiţiile la limite

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d[\theta^* - (\tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa} p^2)]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right\} = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa} p}\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}$$

şi

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to\infty}\left(\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2}\right) = \textit{finită}.$$

Prin schimbarea de funcţie

$$\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2} = \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-1/2} \Theta^*$$

care implică

$$\frac{d[\theta^* - (\tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa}p^2)]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} = \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-1/2} \frac{d\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} - \frac{1}{2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-3/2} \Theta^*$$

şi

$$\frac{d^2[\theta^* - (\tilde{\mu}\tilde{\chi}/\tilde{\varkappa}p^2)]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} = \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-1/2} \frac{d^2\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} -$$

$$- \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-3/2} \frac{d\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} + \frac{3}{4}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-5/2} \Theta^*,$$

ecuaţia (6.37) se aduce la forma *ecuaţiei lui Bessel modificate*

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d^2\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^2} + \left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) \frac{d\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})} - \left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \Theta^* = 0$$

cu soluţia generală

$$\Theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) = A\, I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + B\, K_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)$$

sau

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{1/2}\left(\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2}\right) = A\, I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + B\, K_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right),$$

unde $I_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})$ şi $K_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}}) = [\pi/(2r\sqrt{p/\tilde{\chi}})]^{1/2}\, e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}$

sînt *funcţiile lui Bessel modificate de ordinul 1/2 şi speţa întîia şi respectiv a doua.* Ţinînd seamă că funcţia

$$\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2} = A\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-1/2} I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) + B\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-1/2} K_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right) \tag{6.38}$$

trebuie să satisfacă condiţiile la limite impuse pentru ecuaţia (6.37) şi că funcţiile liniar independente care o constituie se prezintă cu limitele

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to\infty}\left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^{-1/2} I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\right] = \infty$$

şi

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d[(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^{-1/2} K_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right\} =$$

$$= \lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)^2 \frac{d[(\pi/2)^{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})^{-1} e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})}\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}})\to 0}\left[e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}\left(1 + r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}}\right)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

se deduce respectiv:

$$A = 0, \; B = \frac{Q}{\pi\tilde{\varkappa}p\sqrt{2\pi\tilde{\chi}/p}}$$

şi deci

$$\theta^* - \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}p^2} = \frac{Q \cdot e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}}}}{2\pi\tilde{\varkappa}pr}$$

sau

$$\theta^*(p, r) = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}r}\frac{e^{-(r/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}}}{p} + \frac{\tilde{\mu}\tilde{\chi}}{\tilde{\varkappa}}\frac{1}{p^2}. \tag{6.39}$$

Potrivit transformărilor 33 și 14 din tabelul 4.2, pentru funcția «imagine» (6.39) se găsește funcția «original» $\theta(t, \mathrm{r}) = \mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p, \mathrm{r})]$ exprimată sub forma

$$\theta(t, \mathrm{r}) = \frac{Q}{2\pi \tilde{\chi}\, \mathrm{r}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\mathrm{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}\right) + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\chi}}\, \tilde{\chi} t \tag{6.40}$$

în care

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\mathrm{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi} t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{r}/(2\sqrt{\tilde{\chi} t})} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{r}/(2\sqrt{\tilde{\chi} t})}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

este *complementara funcției erorilor* cu valorile uzuale înscrise în tabelul 4.3.

Dacă termoconducția radial-sferică nestaționară neconservativă este datorită unui lacolit cu domeniul de influență termică extins pînă la distanța R față de centrul sursei magmatice și creșterea de temperatură $\theta(t, \mathrm{r})$ în acest domeniu satisface ecuația (6.4) cu condiția inițială $\theta(0, \mathrm{r}) = f(\mathrm{r})$ pentru $0 \leqslant \mathrm{r} \leqslant R$ și cu condițiile la limite $\theta(t, 0) =$ *finită* și $\theta(t, R) = 0$ pentru $t \geqslant 0$, atunci se poate aplica *metoda separării variabilelor*, recurgînd la o soluție $\theta(t, \mathrm{r}) = \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{R}(\mathrm{r})$ prin care ecuația (6.4) se aduce la forma

$$\frac{\mathcal{R}}{\tilde{\chi}} \frac{d\mathcal{T}}{dt} - \frac{2\mathcal{T}}{\mathrm{r}} \frac{d\mathcal{R}}{d\mathrm{r}} - \mathcal{T} \frac{d^2\mathcal{R}}{d\mathrm{r}^2} = - \frac{\mathcal{T}\mathcal{R}}{\tilde{\mathrm{B}}^2}$$

sau

$$\frac{1}{\tilde{\chi}\mathcal{T}} \frac{d\mathcal{T}}{dt} + \frac{1}{\tilde{\mathrm{B}}^2} = \frac{\mathrm{r}}{2\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{d\mathrm{r}} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d^2\mathcal{R}}{d\mathrm{r}^2} = -\lambda^2,$$

unde se evidențiază ecuațiile diferențiale

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} + \left(\frac{1}{\tilde{\mathrm{B}}^2} + \lambda^2\right) \tilde{\chi} \mathcal{T} = 0$$

și

$$\mathrm{r}^2 \frac{d^2\mathcal{R}}{d\mathrm{r}^2} + 2\mathrm{r} \frac{d\mathcal{R}}{d\mathrm{r}} + \lambda^2 \mathrm{r}^2 \mathcal{R} = 0.$$

Întrucît aceste două ecuații diferențiale au soluțiile

$$\mathcal{T}(t, \lambda) = C_0(\lambda)e^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}$$

și respectiv

$$\mathcal{R}(r, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left[C_1(\lambda)\frac{\sin\lambda r}{r} - C_2(\lambda)\frac{\cos\lambda r}{r}\right],$$

urmează că soluția $\theta(t, r, \lambda) = \mathcal{T}(t, \lambda)\cdot\mathcal{R}(r, \lambda)$ se constituie astfel:

$$\theta(t, r, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left(C_0C_1\frac{\sin\lambda r}{r} - C_0C_2\frac{\cos\lambda r}{r}\right)e^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left[A(\lambda)\frac{\sin\lambda r}{r} - B(\lambda)\frac{\cos\lambda r}{r}\right]e^{-(1/\tilde{B}^2+\lambda^2)\tilde{\chi}t}. \quad (6.41)$$

Impunînd condițiile la limite $\theta(t, 0) =$ *finită* și $\theta(t, R) = 0$ pentru $t \geqslant 0$, se deduce respectiv că $B = 0$ și $\lambda_n = n\pi/R$, astfel încît soluția (6.41) se reține cu expresia

$$\theta_n(t, r) = \sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}}\frac{A_n}{r}e^{-\left(\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{n^2\pi^2}{R^2}\right)\tilde{\chi}t}\cdot\sin\frac{n\pi r}{R},$$

iar soluția generală $\theta(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t, r)$ a ecuației (6.4) se prezintă sub forma

$$\theta(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}}\frac{A_n}{r}e^{-\left(\frac{1}{\tilde{B}^2}+\frac{n^2\pi^2}{R^2}\right)\tilde{\chi}t}\cdot\sin\frac{n\pi r}{R} \quad (6.42)$$

cu condiția inițială $\theta(0, r) = f(r)$ reluată prin *funcția impară*

$$r\theta(0, r) = rf(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2R}{n\pi^2}}A_n\sin\frac{n\pi r}{R}$$

potrivit căreia coeficienții $\sqrt{2R/n\pi^2}A_n$ se determină prin formula (6.28). Dacă termoconducția radial-sferică nestaționară neconservativă

se conformează ecuației (6.4) cu condiția inițială $\theta(0, \mathrm{r}) = f(\mathrm{r})$ pentru $0 \leqslant \mathrm{r} \leqslant R$ și cu condițiile la limite

$$\lim_{\mathrm{r}\to 0} [\theta(t, \mathrm{r}) + \mathrm{r}\partial\theta(t, \mathrm{r})/\partial\mathrm{r}] = \lim_{\mathrm{r}\to 0} \{\partial[\mathrm{r}\theta(t, \mathrm{r})]/\partial\mathrm{r}\} = 0 \text{ și } \lim_{\mathrm{r}\to R} \theta(t, \mathrm{r}) = 0$$

pentru $t \geqslant 0$, atunci soluția (6.41) se reține cu $A = 0$ și $\lambda_n = (2n + 1)\pi/2R$, adică

$$\theta_n(t, \mathrm{r}) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\,\frac{B_n}{\mathrm{r}}\, e^{-\left[\frac{1}{\tilde{B}^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4R^2}\right]\tilde{\chi}t} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi\mathrm{r}}{2R},$$

iar soluția generală $\theta(t, \mathrm{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t, \mathrm{r})$ se exprimă sub forma

$$\theta(t, \mathrm{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\,\frac{B_n}{\mathrm{r}}\, e^{-\left[\frac{1}{\tilde{B}^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4R^2}\right]\tilde{\chi}t} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi\mathrm{r}}{2R} \tag{6.43}$$

în care coeficienții $-(2/\pi)\sqrt{R/(2n+1)}\, B_n$ sînt determinați prin formula (6.30) corespunzătoare *funcției pare*

$$\mathrm{r}\theta(0, \mathrm{r}) = \mathrm{r}f(\mathrm{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2n+1}}\, B_n \cos\frac{(2n+1)\pi\mathrm{r}}{2R}$$

identificate prin intermediul condiției inițiale $\theta(0, \mathrm{r}) = f(\mathrm{r})$.

În cazul termoconducției radial-sferice nestaționare neconservative cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic omogen și izotrop cu extindere presupusă nelimitată în care creșterea de temperatură satisface ecuația (6.4) cu condiția inițială $\theta(0, \mathrm{r}) = 0$ pentru $\mathrm{r} \geqslant 0$ și cu condițiile la limite $\lim_{\mathrm{r}\to 0} [-\mathrm{r}^2\partial\theta(t, \mathrm{r})/\partial\mathrm{r}] = Q/2\pi\tilde{\lambda}$ și $\lim_{\mathrm{r}\to\infty} \theta(t, \mathrm{r}) = finită$ pentru $t \geqslant 0$, se poate recurge la *metoda transformatei Laplace*, operînd în raport cu variabila t potrivit relațiilor

$$\mathcal{L}[\theta(t, \mathrm{r})] = \int_0^{\infty} \theta(t, \mathrm{r})\, e^{-pt}\, dt = \theta^*(p, \mathrm{r}),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\right]=\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial r}\, e^{-pt}\, dt = \frac{d\theta^*}{dr},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right]=\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\, e^{-pt}\, dt = \frac{d^2\theta^*}{dr^2},$$

și

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]=\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial t}\, e^{-pt}\, dt = p\theta^*(p, r) - \theta(0, r),$$

unde $\theta(0, r) = 0$ prin condiția inițială. Din transformarea integrală a ecuației (6.4) și a condițiilor sale la limite rezultă ecuația operațională

$$\frac{p}{\tilde{\chi}}\theta^* - \frac{2}{r}\frac{d\theta^*}{dr} - \frac{d^2\theta^*}{dr^2} = -\frac{\theta^*}{\tilde{B}^2}$$

sau

$$r^2\frac{d^2\theta^*}{dr^2} + 2r\frac{d\theta^*}{dr} - r^2\left(\frac{p}{\tilde{\chi}} + \frac{1}{\tilde{B}^2}\right)\theta^* = 0 \qquad (6.44)$$

cu condițiile $\lim\limits_{r\to 0}\,[-r^2 d\theta^*(p, r)/dr] = Q/(2\pi\tilde{\chi}p)$ și $\lim\limits_{r\to\infty}\theta^*(p, r) =$ $=$ *finită*. Efectuînd schimbarea de funcție $\theta^* = r^{-1/2}\Theta^*$ și ținînd seamă că

$$\frac{d\theta^*}{dr} = r^{-1/2}\frac{d\Theta^*}{dr} - \frac{1}{2}r^{-3/2}\Theta^*$$

și

$$\frac{d^2\theta^*}{dr^2} = r^{-1/2}\frac{d^2\Theta^*}{dr^2} - r^{-3/2}\frac{d\Theta^*}{dr} + \frac{3}{4}r^{-5/2}\Theta^*,$$

ecuația operațională (6.44) se transpune sub forma *ecuației lui Bessel modificate*

$$r^2\frac{d^2\Theta^*}{dr^2} + r\frac{d\Theta^*}{dr} - \left[r^2\left(\frac{p}{\tilde{\chi}} + \frac{1}{\tilde{B}^2}\right) + \frac{1}{4}\right]\Theta^* = 0$$

sau

$$\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2\frac{d^2\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})^2}+$$

$$+\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\frac{d\Theta^*}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})}-\left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\Theta^*=0$$

cu soluția generală

$$\Theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)=A\,I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)+B\,K_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)$$

care se reține, conform schimbării de funcție $\theta^*=r^{-1/2}\,\Theta^*$, astfel:

$$\theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)=\left(\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot\left[A I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)+BK_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)=0, \qquad (6.45)$$

unde $I_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})$ și $K_{1/2}(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})=[\pi/(2r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})]^{1/2}\cdot$ $\cdot e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}}$ sînt *funcțiile lui Bessel modificate de ordinul 1/2 și speța întîia și respectiv a doua*. Dacă se impun condițiile la limite preluate sub formele

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to\infty}\theta^*\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)=\textit{finită}$$

și

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to\infty}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2\frac{d[\theta^*(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})]}{d(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})}\right\}=$$

$$=\frac{Q}{2\pi\tilde{\chi}p}\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}$$

cărora le corespund trecerile la limite

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to\infty}\left[\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^{-1/2} I_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\right]=\infty$$

și

$$\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\left[\left(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}\right)^{-1/2} K_{1/2}\left(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}\right)\right]}{d\left(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}\right)}\right\}=$$

$$+\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to 0}\left\{-\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\left[(\pi/2)^{1/2}\left(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}\right)^{-1} e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}}\right]}{d\left(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}\right)}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\lim_{(r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2})\to 0}\left[e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}}\left(1+r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

atunci se deduce că $A=0$ și $B=[Q/(\pi\tilde{\lambda}_p\sqrt{2\pi})]\,(\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\mathbf{B}^2})^{1/2}$, astfel încît soluția (6.45) se reține cu expresia

$$\theta^*=\frac{Q}{\pi\tilde{\lambda}_p\sqrt{2\pi r}}\sqrt{\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}}\;K_{1/2}\left(r\sqrt{\frac{p}{\tilde{\chi}}+\frac{1}{\tilde{B}^2}}\right)=\frac{Q\cdot e^{-r\sqrt{p/\tilde{\chi}+1/\tilde{B}^2}}}{2\pi\tilde{\lambda}_p r}$$

sau

$$\theta^*(p, r)=\frac{Q}{2\pi\tilde{\lambda} r}\,\frac{e^{-(r/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p+\tilde{\chi}/\tilde{B}^2}}}{p}. \qquad (6.46)$$

Întrucît soluția ecuației operaționale (6.44) este reprezentată prin funcția «imagine» (6.46), urmează că soluția căutată pentru ecuația

(6.4) se exprimă prin funcția «original»

$$\theta(t, \mathrm{r}) = \mathcal{L}^{-1}[\theta^*(p, \mathrm{r})] = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}\mathrm{r}}\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left[\mathrm{e}^{-(\mathrm{r}/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p+\tilde{\chi}/\tilde{\mathrm{B}}^2}}\right]\right\}. \tag{6.47}$$

Prin intermediul transformării 30, teoremei 3 și transformării 8 din tabelul 4.2 potrivit cărora

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-(\mathrm{r}/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p}}\right] = \frac{\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{r}^2/4\tilde{\chi}t}}{2t\sqrt{\pi\tilde{\chi}t}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-(\mathrm{r}/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p+\tilde{\chi}/\tilde{\mathrm{B}}^2}}\right] = \mathrm{e}^{-\tilde{\chi}t/\tilde{\mathrm{B}}^2}\cdot\frac{\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{r}^2/4\tilde{\chi}t}}{2t\sqrt{\pi\tilde{\chi}t}}$$

și respectiv

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left[\mathrm{e}^{-(\mathrm{r}/\sqrt{\tilde{\chi}})\sqrt{p+\tilde{\chi}/\tilde{\mathrm{B}}^2}}\right]\right\} = \int_0^t \frac{\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{r}^2/4\tilde{\chi}t-\tilde{\chi}t/\tilde{\mathrm{B}}^2}}{2t\sqrt{\pi\tilde{\chi}t}}\,\mathrm{d}t,$$

se găsește că soluția (6.47) este de forma

$$\theta(t, \mathrm{r}) = \frac{Q}{4\pi\tilde{\varkappa}\sqrt{\pi\tilde{\chi}}}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}^2/4\tilde{\chi}t-\tilde{\chi}t/\tilde{\mathrm{B}}^2}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}\mathrm{r}\sqrt{\pi}}\int_{u=\mathrm{r}^2/4\tilde{\chi}t}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u-\mathrm{r}^2/4\tilde{\mathrm{B}}^2u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u. \tag{6.48}$$

6.6. Aplicații

6.6.1. Să se determine fluxul de termoconducție dintr-un lacolit activ într-un sector semisferic omogen și izotrop cu conductibilitatea termică de 3,00 W/m · °K, presupunînd termoconducția radial-sferică staționară conservativă și cunoscînd că influența termică a lacoli-

tului este reprezentată prin creşteri ale temperaturii de 482,32°K şi 479,84°K la distanţe de 300 m şi respectiv 1000 m faţă de centrul sursei magmatice.

Rezolvare. Prin aplicarea formulei (6.8) preluată sub forma

$$Q = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}(\theta_1 - \theta_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

în care $\tilde{\varkappa} = 3,00$ W/m · °K, $\theta_1 = 482,32$°K, $\theta_2 = 479,84$°K ...

6.6.3. Să se calculeze productivitatea medie de căldură a unității de volum, în cazul termoconducției radial-sferice staționare conservative cu flux constant dintr-un lacolit într-un sector semisferic omogen și izotrop cu conductibilitatea termică de 2,00 W/m . °K, în care se înregistrează creșteri ale temperaturii de 410,02°K, 400,00°K și 393,11°K la distanțele de 200 m, 300 m și respectiv 400 m față de centrul sursei magmatice a lacolitului.

Rezolvare. Aplicînd formula (6.19) succesiv pentru intervalele de la r_1 la r_2 și de la r_2 la r_3, se obține:

$$\frac{Q}{2\pi} - \frac{\tilde{\mu}\, r_0^3}{3} = \frac{\tilde{\varkappa}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{\tilde{\mu}}{6}(r_2^2 - r_1^2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} =$$

$$= \frac{\tilde{\varkappa}(\theta_2 - \theta_3) - \frac{\tilde{\mu}}{6}(r_3^2 - r_2^2)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}}$$

și deci

$$\tilde{\mu} = 6 \cdot \tilde{\varkappa}\, \frac{\dfrac{\theta_2 - \theta_3}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}} - \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}{\dfrac{r_3^2 - r_2^2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}} - \dfrac{r_2^2 - r_1^2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}.$$

Deoarece $\tilde{\varkappa} = 2{,}00$ W/m . °K, $\theta_1 = 410{,}02$°K, $\theta_2 = 400{,}00$°K, $\theta_3 = 393{,}11$°K, $r_1 = 200$ m, $r_2 = 300$ m și $r_3 = 400$ m, urmează că

$$\tilde{\mu} = 6 \cdot 2{,}00\, \frac{\dfrac{400{,}00 - 393{,}11}{\frac{1}{300} - \frac{1}{400}} - \dfrac{410{,}02 - 400{,}00}{\frac{1}{200} - \frac{1}{300}}}{\dfrac{400^2 - 300^2}{\frac{1}{300} - \frac{1}{400}} - \dfrac{300^2 - 200^2}{\frac{1}{200} - \frac{1}{300}}} \approx 5{,}013 \cdot 10^{-4}\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}.$$

6.6.4. În condiţiile termoconducţiei radial-sferice staţionare neconservative cu fluxul $Q = const.$ dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic de conductibilitate termică $\tilde{\varkappa} = const.$ şi extindere presupusă infinită în care productivitatea medie de căldură a unităţii de volum este direct proporţională cu creşterea de temperatură şi invers proporţională cu pătratul factorului de neconservativitate $\tilde{B} = const.$, să se calculeze factorul $\tilde{B}$ ştiind că pe intervalul de la 200 m la 1000 m faţă de centrul sursei magmatice se înregistrează pentru creşterea de temperatură o diminuare de 1%.

Rezolvare. Potrivit formulei (6.22) aplicate pentru distanţa $r = r_1$ şi $r = r_2$ la care se înregistrează creşterea de temperatură $\theta = \theta_1$ şi respectiv $\theta = \theta_2$, adică

$$\theta_1 = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}} \frac{e^{-r_1/\tilde{B}}}{r_1}$$

şi

$$\theta_2 = \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}} \frac{e^{-r_2/\tilde{B}}}{r_2},$$

rezultă că

$$\frac{\theta_2 r_2}{\theta_1 r_1} = e^{-(r_2 - r_1)/\tilde{B}}$$

sau

$$\tilde{B} = -\frac{r_2 - r_1}{\ln \dfrac{\theta_2 r_2}{\theta_1 r_1}}.$$

Fiind date $r_1 = 200$ m, $r_2 = 1000$ m şi $(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 = -0{,}01$ sau $\theta_2/\theta_1 = 0{,}99$, se obţine:

$$\tilde{B} = -\frac{1000 - 200}{\ln\left(0{,}99\,\dfrac{1000}{200}\right)} \approx 500 \text{ m}.$$

6.6.5. În cazul termoconducţiei radial-sferice nestaţionare conservative cu fluxul Q presupus constant dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic omogen şi izotrop cu conductibilitate termică $\tilde{\varkappa}$ de 2,9 W/m · °K, cu difuzivitate termică $\tilde{\chi}$ de

1,25 $\cdot 10^{-6}$m²/s și cu extindere considerată nelimitată în care creșterea de temperatură $\theta(t, \mathbf{r})$ datorită lacolitului satisface condiția inițială $\theta(0, \mathbf{r}) = 0$ pentru $0 \leqslant \mathbf{r} < \infty$ și condițiile la limite $\lim_{\mathbf{r}\to 0} [-\mathbf{r}^2 \partial\theta(t, \mathbf{r})/\partial \mathbf{r}] = Q/2\pi\tilde{\varkappa}$ și $\lim_{\mathbf{r}\to\infty} \theta(t, \mathbf{r}) = finit\breve{a}$ pentru $t \geqslant 0$, să se determine fluxul de căldură Q și timpul scurs de la apariția lacolitului pînă la un moment dat t, cunoscînd valorile de 3,3°K și 0,5°K ale creșterii de temperatură în momentul t la distanțele de 200 m și respectiv 300 m față de centrul sursei magmatice.

Rezolvare. Prin intermediul soluției (6.34) și al argumentului său $\mathbf{r}/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})$ logaritmate sub formele

$$\lg[\mathbf{r}\theta(t, \mathbf{r})] = \lg \frac{Q}{2\pi\tilde{\varkappa}} + \lg \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\mathbf{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right]$$

și

$$\lg \mathbf{r} = \lg (2\sqrt{\tilde{\chi}t}) + \lg\left(\frac{\mathbf{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right),$$

se evidențiază, pentru $Q/\tilde{\varkappa} = const.$, $\tilde{\chi} = const.$ și t fix, translația fără rotație a *curbei reprezentative a încălzirii* corespunzătoare funcției

$$\lg[\mathbf{r}\theta(t, \mathbf{r})] = f_1(\lg \mathbf{r})$$

față de *curba teoretică* (*standard*) corespunzătoare funcției

$$\lg\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\mathbf{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right] = f_0\left[\lg\left(\frac{\mathbf{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right].$$

Dacă se trasează curba teoretică într-un sistem de coordonate în care sînt înscrise pe abscisă valorile $\lg [\mathbf{r}/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})]$ și pe ordonată valorile $\lg \{\operatorname{erfc} [\mathbf{r}/(2\sqrt{\tilde{\chi}t})]\}$ din tabelul 6.2 (fig. 6.4, a), iar punctele curbei reprezentative a încălzirii într-un același sistem de coordonate în care sînt înscrise pe abscisă valorile $\lg \mathbf{r}$ și pe ordonată valorile $\lg [\mathbf{r}\theta(t, \mathbf{r})]$ date respectiv prin $\lg \mathbf{r}_1 = \lg 200 = 2{,}3010$ și $\lg [\mathbf{r}_1\theta(t, \mathbf{r}_1)] = \lg (200 \cdot 3{,}3) = 2{,}8195$; $\lg \mathbf{r}_2 = \lg 300 = 2{,}4771$ și $\lg [\mathbf{r}_2\theta(t, \mathbf{r}_2)] = \lg (300 \cdot 0{,}5) = 2{,}1761$ (fig. 6.4, b), atunci se pot suprapune și glisa punctele curbei reprezentative a încălzirii pe curba teoretică, menținînd axele de coordonate paralele, pînă se precizează intervalul de suprapunere optimă (cel mai lung interval de suprapunere) a acestora. Indiferent

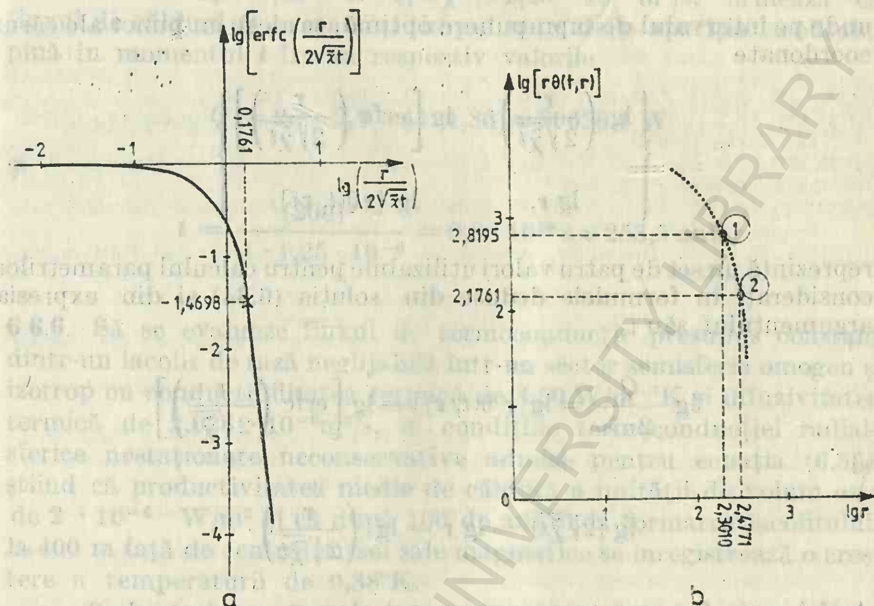


Fig. 6.4. Curba teoretică (*a*) și punctele curbei reprezentative a încălzirii (*b*) pentru interpretarea datelor din aplicația 6.6.5.

Tabelul 6.2.

Valorile uzuale ale logaritmului zecimal al complementarei funcției erorilor

$\lg\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)$	$\lg\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right]$	$\lg\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)$	$\lg\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right]$
$-\infty$	0		
−2,0000	−0,0049	0,0000	−0,8033
−1,6990	−0,0099	+0,0792	−1,0472
−1,3979	−0,0200	+0,1461	−1,3215
−1,2218	−0,0304	+0,2041	−1,6253
−1,0969	−0,0410	+0,2553	−1,9626
−1,0000	−0,0518	+0,3010	−2,3279
−0,6990	−0,1094	+0,3424	−2,7212
−0,3979	−0,2429	+0,3802	−3,1549
−0,2218	−0,4022	+0,4150	−3,6990
−0,0969	−0,5885	$+\infty$	$-\infty$

unde pe intervalul de suprapunere optimă, se alege un punct ale cărui coordonate

$$\left\{\begin{matrix} \lg\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right), & \lg\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right] \\ \lg r, & \lg[r\theta(t, r)] \end{matrix}\right\}$$

reprezintă un set de patru valori utilizabile pentru calculul parametrilor considerați în formulele deduse din soluția (6.34) și din expresia argumentului său :

$$\lg\frac{Q}{2\pi\tilde{\lambda}} = \lg[r\,\theta(t, r)] - \lg\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right]$$

și

$$\lg(2\sqrt{\tilde{\chi}t}) = \lg r - \lg\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right).$$

Astfel ca în figura 6.4 pentru punctul ales cu coordonatele

$$\left\{\begin{matrix} \lg\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right) = 0{,}1761\,; & \lg\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)\right] = -1{,}4698 \\ \lg r = 2{,}4771\,; & \lg[r\theta(t, r)] = 2{,}1761 \end{matrix}\right\},$$

rezultă că

$$\lg\frac{Q}{2\pi\tilde{\lambda}} = 2{,}1761 - (-1{,}4698) = 3{,}6459$$

și

$$\lg(2\sqrt{\tilde{\chi}t}) = 2{,}4771 - 0{,}1761 = 2{,}3010,$$

adică

$$\frac{Q}{2\pi\tilde{\lambda}} = 4424{,}86\ \text{m}\cdot{}^\circ\text{K}$$

și

$$2\sqrt{\tilde{\chi}t} = 200\ \text{m}.$$

Întrucît $\tilde{\varkappa} = 2,9$ W/m · °K și $\tilde{\chi} = 1,25 \cdot 10^{-6}$m²/s, urmează că fluxul de căldură $Q = const.$ și timpul scurs de la apariția lacolitului pînă în momentul t fix au respectiv valorile

$$Q = 2\pi \cdot 2,9 \cdot 4424,86 \approx 80626,4 \text{ W}$$

și

$$t = \frac{(200)^2}{4 \cdot 1,25 \cdot 10^{-6}} = 0,8 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 253,5 \text{ ani.}$$

6.6.6. Să se evalueze fluxul de termoconducție, presupus constant dintr-un lacolit de rază neglijabilă într-un sector semisferic omogen și izotrop cu conductibilitatea termică de 3,50 W/m ·°K și difuzivitatea termică de $2,028 \cdot 10^{-6}$m²/s, în condițiile termoconducției radial-sferice nestaționare neconservative admise pentru ecuația (6.35), știind că productivitatea medie de căldură a unității de volum este de $2 \cdot 10^{-4}$ W/m³ și că după 100 de ani de la formarea lacolitului, la 400 m față de centrul sursei sale magmatice se înregistrează o creștere a temperaturii de 0,38°K.

Rezolvare. Potrivit formulei (6.40) aplicate sub forma

$$Q = \frac{2\pi\tilde{\varkappa}\,\mathrm{r}}{\operatorname{erfc}\left(\dfrac{\mathrm{r}}{2\sqrt{\tilde{\chi}t}}\right)}\left(\theta - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}\,\tilde{\chi}t\right)$$

în care $\tilde{\varkappa} = 3,50$ W/m · °K, $\tilde{\chi} = 2,028 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $\tilde{\mu} = 2 \cdot 10^{-4}$W/m³, $t = 100$ ani $= 3,15576 \cdot 10^9$ s, $\mathrm{r} = 400$ m și $\theta = 0,38$°K, se găsește, utilizînd valorile din tabelul 4.3, că

$$Q = \frac{2\pi \cdot 3,50 \cdot 400}{\operatorname{erfc}\left(\dfrac{400}{2\sqrt{2,028 \cdot 10^{-6} \cdot 3,15576 \cdot 10^9}}\right)} \times$$

$$\times\left(0,38 - \frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,50} \cdot 2,028 \cdot 10^{-6} \cdot 3,15576 \cdot 10^9\right) = 314308,9 \text{ W.}$$

Bibliografie

ASCOLI, G. (1956). *Transformazione di Laplace*, Gheroni, Torino.

CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford.

CHURCHILL, R. V. (1956). *Extension of operational mathematics*, Univ. Maryland Book Store, College Park, Md.

CREȚU, I., SOARE, AL., DAVID, V., OSNEA, AL. (1966). *Probleme de hidraulică subterană*, Cap. III, p. 82, 116–121. Editura tehnică, București.

CRISTEA, N. (1956). *Hidraulica subterană*, vol. I, Cap. VII, p. 136–140, Editura tehnică, București.

DAVIDESCU, AL. (1965). In: Manualul inginerului (ed. Gh. Buzdugan), vol. I, *Fizica*, Cap. VII, 8, p. 1285–1290, Editura tehnică, București.

DITKIN, V. A., PRUDNIKOV, A. P. (1974). *Integralinie preobrazovaniia i operaționnoe iscislenie*, Izdatelistvo « Nauka », Moskva.

DOETSCH, G., HERSCHEL, R. (1961). *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, Ed. R. Olendorf, München.

GRAY, A., MATHEWS, G. B. (1958). *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică* (trad. din limba engleză după ediția a doua revăzută de A. Gray și T. M. Macrobert), Cap. XVI, p. 305–321, Editura tehnică, București.

GHEORGHIȚĂ, ȘT. I. (1966). *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Cap. V, p. 376–377, Editura Acad. R.S.R., București.

HALLER, J. (1953). *Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom parabolischen Typus*, Zurich.

IACOB, C., COCÂRLAN, P., DRAGOȘ, L., GHEORGHIȚĂ, ȘT. I., HOMENTCOVSCHI, D., NICOLAU, AL., SOÓS, E. (1981). *Matematici clasice și moderne*, vol. III, Cap. 55, A, p. 112–115, Editura tehnică, București.

IORDACHE, O., SMIGELSCHI, O. (1981). *Ecuațiile fenomenelor de transfer de masă și căldură*, Cap. 3, p. 102–105, Editura tehnică, București.

JACKSON, D. (1941). *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Minnesota.

JAEGER, J. C., NEWSTEAD, G. H. (1971). *Introducere în teoria transformării Laplace cu aplicații în tehnică* (trad. din limba engleză după ediția a treia, 1969), Editura tehnică, București.

JEFFREYS, H., JEFFREYS, B. S. (1950). *Methods of mathematical physics*, 2nd ed., University Press, Cambridge.

KÎRLOV, V. I., SKOBLIA, N. S. (1968). *Spravocinaia kniga po cislennomu obrașceniiu preobrazovania Laplasa*, Nauka i tehnika, Minsk.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1971). *Mécanique des fluides* (traduit du russe), Physique théorique, tome VI, Chap. V, p. 240–252, Éditions Mir, Moscou.

MIKHAÏLOV, V. (1980). *Équations aux dérivées partielles* (traduit du russe), Chap. VI, *Équations paraboliques*, p. 337–383, Éditions Mir, Moscou.

PARODI, M. (1948). *Applications physiques de la transformation de Laplace*, Paris.

POLLACK, H. N. (1965). *Steady Heat Conduction in Layered Mediums: The Half-Space and Sphere*, Journal of Geophysical Research, vol. 70, no. 22, p. 5647–5648.

SABAC, I. GH. (1965). *Matematici speciale*, vol. II, Cap. X, § 3, p. 326–356, Editura didactică și pedagogică, București.

STUART, R. D. (1961). *An Introduction to Fourier Analysis*, Methuen and Co Ltd., London; John Wiley and Sons Inc., New York.

TAITEL, Y. (1972). *On the parabolic, hyperbolic and discrete formulation of the heat conduction equation*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 15, 369.

THOMSON, W. (1950). *Laplace Transformation*, New York.

TYE, R. P. (1969). *Thermal Conductivity*, Academic Press, New York.

WAGNER, K. W. (1950). *Operatorenrechnung und Laplacesche transformation*, Leipzig.

WATSON, G. N. (1949). *Teoriia besselevih funk[ii*, Ceasti pervaia (Perevod so 2-go angliiskogo izdaniia), Glava III, p. 94, Izdatelistvo inostrannoi literaturi, Moskva.

WIDDER, D. W. (1946). *The Laplace Transform*, Princeton.

ZELDOVITCH, I. B., KOMPANEETS, A. S. (1950). *On the theory of heat propagation and heat conduction depending on temperature*, Izd. Akad. Nauk. S.S.S.R., Moscow.

«Totuşi, înainte de a trece la examinarea principiilor de minim ale dinamicii, care nu sînt atît de limpezi şi de satisfăcătoare ca ale staticii, să examinăm mai întîi o altă parte a fizicii, care constituie un domeniu oarecum intermediar între statică şi dinamică. Este vorba despre teoria căldurii, termodinamica şi mecanica statistică. Fenomenele despre care este vorba aici sînt de felul următor: sînt puse în contact sau amestecate substanţe de compoziţii şi temperaturi diferite şi se cercetează sistemul total care rezultă. De aceea, aici avem de-a face cu trecerea de la o stare de echilibru la alta; dar nu ne interesează atît de mult însăşi această trecere, cît starea finală rezultată.»

MAX BORN

7. Hidrotermoconvecţia

7.1. Ecuaţiile fundamentale

Potrivit reprezentării generale din capitolul 3, pentru orice porţiune a crustei terestre constituită dintr-o fracţiune m_e ocupată de componente dinamic active şi dintr-o fracţiune complementară $(1 - m_e)$ ocupată de componente dinamic inactive, propagarea căldurii prin conducţie şi prin convecţie în crusta terestră se conformează ecuaţiei de difuzivitate termică (3.36) cu forma

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\,\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p m_e \vec{u}\,\text{grad}\,T - \text{div}\,(\tilde{\varkappa}\,\text{grad}\,T) = \tilde{\mu}$$

în care termenul $\rho c_p m_e \vec{u}$ grad T este datorit termoconvecţiei caracterizate prin impulsul relativ $\vec{u}$ nenul al unităţii de masă a componentelor dinamic active faţă de impulsul considerat nul al unităţii de masă a componentelor dinamic inactive. Mişcarea componentelor dinamic active se poate determina prin intermediul ecuaţiei termice de stare (1.13), legii de termoconvecţie (3.21) şi ecuaţiei de continuitate (3.35). Din ecuaţia termică de stare (1.13), în care

$$d\tilde{\rho} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \vec{r}}\,d\vec{r}$$

se identifică cu

$$\tilde{\rho}\left(-\tilde{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}+\tilde{\beta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\tilde{\rho}\left(-\tilde{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \vec{r}}+\tilde{\beta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \vec{r}}\right)\mathrm{d}\vec{r},$$

rezultă egalitatea

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}=\tilde{\rho}\left(-\tilde{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}+\tilde{\beta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}\right)$$

reconsiderată, pentru $\partial \tilde{c}_{\tilde{p}}/\partial t=0$, astfel:

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t}=\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\left(-\tilde{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}+\tilde{\beta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}\right). \tag{7.1}$$

Preluînd legea de termoconvecţie (3.21) sub forma

$$\rho c_p m_e \vec{u}=-\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{grad}\,\tilde{p}+\sum_{j=2}^{n}\widetilde{X}^j\,\mathrm{grad}\,\tilde{x}_j\right)$$

şi explicitînd, pe lîngă termenul gradientului de presiune, termenul gradientului de potenţial gravitaţional

$$-\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\widetilde{X}^2\,\mathrm{grad}\,\tilde{x}_2=-\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}g\,\mathrm{grad}\,z,$$

unde $-g\,\mathrm{grad}\,z=\vec{g}$ reprezintă acceleraţia gravitaţiei, dar neglijînd suma celorlalţi termeni ai gradienţilor de concentraţie a componenţilor chimici, de potenţial electric, de potenţial magnetic etc., adică

$$-\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\sum_{j=3}^{n}\widetilde{X}^j\,\mathrm{grad}\,\tilde{x}_j=0,$$

se obţine relaţia

$$\rho c_p m_e \vec{u}=-\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{grad}\,\tilde{p}+g\,\mathrm{grad}\,z\right). \tag{7.2}$$

În sfîrşit, potrivit relaţiilor (7.1) şi (7.2), din ecuaţia de continuitate (3.35) se deduce *ecuaţia de difuzivitate*

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}\left(-\tilde{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}+\tilde{\beta}\,\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}\right)+\mathrm{div}\left[-\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{c}_{\tilde{p}}T}\left(\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{grad}\,\tilde{p}+g\,\mathrm{grad}\,z\right)\right]=0 \tag{7.3}$$

corespunzătoare propagării din aproape în aproape a interacţiunii particulelor de componente dinamic active prin componentele dinamic inactive (Lee şi MacDonald, 1963 ; Wang, 1963 ; Andrews şi Sleep, 1974 ; Lubimova şi Nikitina, 1975 ; Lubimova et al., 1976).

În cazul hidrotermoconvecţiei (Bird et al., 1960 ; Luikov şi Mikhaylov, 1961 ; Luikov, 1966 ; Kappelmeyer, 1968 ; Van Everdingen şi Hurst, 1969 ; Chan şi Ivey, 1970 ; Landau şi Lifchitz, 1971 ; Holst şi Aziz, 1972 ; Truesdell şi White, 1973 ; Helgeson şi Kirkham, 1974 ; Aladiev et al., 1975 ; Faust şi Mercer, 1975 ; Garg et al., 1975 ; Gringarten şi Sauty, 1975 ; Hurtig, 1975 ; Kassoy şi Zebib, 1975 ; Lowell, 1975 ; Renner et al., 1975 ; Delisle et al., 1976 ; McFarland şi Murphy, 1976 ; Davis şi Lister, 1977 ; Straus şi Schubert, 1977 ; Werner şi Balke, 1978 ; Kappelmeyer, 1979 ; Albu şi Pricăjan, 1980 ; Bories şi Podaire, 1980 ; Castanier et al., 1980 ; Lawton et al., 1980 ; Suter, 1980 ; Albu şi Enăchescu, 1981 ; Hoffers, 1981), m_e are semnificaţia porozităţii eficace (cedării specifice) a unei roci poroase sau fisurate prin care apa dinamic activă cu masa specifică ρ şi cu căldura specifică c_p se mişcă cu viteza de filtraţie $m_e\vec{u}$ determinabilă prin intermediul ecuaţiilor de mişcare cunoscute din mecanica apei subterane (Muskat, 1946 ; Schneebeli, 1955 ; Houpeurt, 1958 ; Ward, 1964 ; Sunada, 1965 ; Rumer, 1969 ; Albu, 1981). Pentru hidrotermoconvecţia într-un strat sau sistem fisural de grosime M situat la adîncime accesibilă cercetării actuale, sînt satisfăcute, de regulă, condiţiile impuse prin aproximările

$$\tilde{\alpha}=\frac{1}{M}\,\frac{\partial M}{\partial T}, \tag{7.4}$$

$$\tilde{\beta}=\frac{1}{(\rho m_e M)}\cdot\frac{\partial(\rho m_e M)}{m_e\,\partial p}=\frac{1}{m_e p}, \tag{7.5}$$

$$\frac{1-\tilde{\alpha}T}{\tilde{\rho}}\,\mathrm{grad}\,\tilde{p}=\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right), \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}})}{\partial t}=\frac{\partial(\rho c_p m_e)}{\partial t} \tag{7.7}$$

şi

$$\frac{\partial c_p}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} c_p = 0 \tag{7.8}$$

convenite pe baza relaţiilor (1.10), (1.11), (3.7), (3.8), (3.9) şi respectiv $dc_p/dt = 0$. Prin intermediul aproximărilor (7.4) şi (7.5) precum şi al definiţiei *coeficientului de înmagazinare eficace* (Albu, 1981)

$$\mathfrak{S} = \frac{\partial(g\rho m_e M)}{\partial p},$$

din ecuaţia termică de stare (1.13) şi din relaţiile (2.20) şi (3.7) care implică egalitatea

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p} = -\tilde{\alpha}\rho m_e \frac{\partial T}{\partial p} + \tilde{\beta}\rho m_e^2 \tag{7.9}$$

se deduce *ecuaţia de stare a înmagazinării* (Jacob, 1950; De Wiest, 1966; Albu şi Enăchescu, 1981)

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p} = \frac{\rho}{M}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho m_e M)}{\partial p} - m_e\frac{\partial M}{\partial p}\right] =$$

$$= \frac{\rho}{M}\left[\mathfrak{S}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{g\rho}\right) - \rho m_e \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{M}{\rho}\right)\right]$$

sau

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p} = \frac{\rho}{M}\left[\mathfrak{S}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial p} - \rho m_e \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{M}{\rho}\right)\right], \tag{7.10}$$

unde $\mathfrak{h} = (p/g\rho) + z + const.$ este *sarcina* (*cota*) *piezometrică* corespunzătoare presiunii p la cota z faţă de un nivel de referinţă constant. Utilizînd aproximarea (7.6) şi relaţia (3.19), din legea de termoconvecţie (3.21) preluată sub forma (7.2) se obţine *legea liniară de filtraţie*

$$m_e\vec{u} = -\frac{g\tilde{\rho}\tilde{\chi}}{\rho c_p T} \operatorname{grad}\left(\frac{p}{g\rho} + z\right) \tag{7.11}$$

sau (Hubbert, 1940; Polubarinova-Kocina, 1952)

$$m_e \vec{u} = -\mathfrak{K} \operatorname{grad} \mathfrak{h} \tag{7.12}$$

în care se evidențiază *conductibilitatea hidraulică* (*coeficientul de filtrație*)

$$\mathfrak{K} = \frac{g \tilde{\rho} \tilde{\chi}}{\rho c_p T}$$

și *sarcina piezometrică*

$$\mathfrak{h} = \frac{p}{g \tilde{\rho}} + z + const.$$

În general, sarcina piezometrică depinde atît de temperatură cît și de presiune prin intermediul masei specifice a apei dinamic active care are expresia similară cu (1.21)

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\alpha(T-T_0)+\beta(p-p_0)} = \rho_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-[\alpha(T-T_0) - \beta(p-p_0)]\}^n}{n!} \right\},$$

dar, întrucît $0 < \beta(p-p_0) \ll \alpha(T-T_0) \ll 1$ și deci

$$\rho \approx \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)],$$

urmează că viteza de filtrație mai poate fi calculată prin formula

$$m_e \vec{u} \approx -\mathfrak{K} \operatorname{grad} \left\{ \frac{p}{g \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]} + z \right\}. \tag{7.13}$$

Potrivit aproximărilor (7.7) și (7.8), ecuației de stare a înmagazinării (7.10) și legii liniare de filtrație (7.12), din ecuația de continuitate (3.35) preluată sub forma

$$\frac{\partial(\rho c_p m_e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c_p m_e \vec{u}) =$$

$$= c_p \left[\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m_e \vec{u}) \right] + \rho m_e \left(\frac{\partial c_p}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} c_p \right) = 0$$

sau

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m_e \vec{u}) = 0$$

rezultă, pentru $\partial\mathfrak{K}/\partial t = 0$, *ecuația fundamentală de difuzivitate hidraulică* (Albu, 1981)

$$\mathfrak{S}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t} - \mathfrak{K}\operatorname{div}(M \operatorname{grad}\mathfrak{h}) - \rho\mathfrak{K}m_e\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M}{\rho\mathfrak{K}}\right) + \vec{u}\operatorname{grad}\left(\frac{M}{\rho\mathfrak{K}}\right)\right] = 0$$

sau

$$\mathfrak{S}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t} - \mathfrak{K}\operatorname{div}(M \operatorname{grad}\mathfrak{h}) = \rho\mathfrak{K}m_e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{M}{\rho\mathfrak{K}}\right) \qquad (7.14)$$

corespunzătoare cazului general al curgerii nestaționare neconservative caracterizate prin $\partial\mathfrak{h}/\partial t \neq 0$ și respectiv $\mathrm{d}(M/\rho\mathfrak{K})/\mathrm{d}t \neq 0$. Pentru un acvifer (strat acvifer sau sistem fisural acvifer) sub presiune, membrul secund al ecuației (7.14) reprezintă debitul de apă transferată prin unitatea de arie a suprafeței de contact al acviferului cu culcușul sau acoperișul său semipermeabil (semietanș) de conductibilitate hidraulică $\mathfrak{K}'$, grosime M' și coeficient de înmagazinare eficace $\mathfrak{S}'$ care îl separă de un alt strat acvifer subordonat din punct de vedere hidraulic. Dacă acviferul subordonat din punct de vedere hidraulic își menține sarcina piezometrică constantă și egală cu sarcina piezometrică inițială $\mathfrak{h}_\infty$ a acviferului principal, atunci termenul $\rho\mathfrak{K}m_e\mathrm{d}(M/\rho\mathfrak{K})/\mathrm{d}t$ se exprimă, potrivit legii liniare de filtrație adaptată *schemei lui Hantush* (Hantush, 1956, 1959, 1960, 1964, 1966; Hantush și Jacob, 1954, 1955), sub forma

$$\rho\mathfrak{K}m_e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{M}{\rho\mathfrak{K}}\right) = \mathfrak{K}'\frac{\mathfrak{h} - \mathfrak{h}_\infty}{M'},$$

iar dacă acviferul subordonat din punct de vedere hidraulic își diminuează sarcina piezometrică prin propagarea întîrziată a scăderii sarcinii piezometrice a acviferului principal astfel încît unei variații $[-\partial(\delta\mathfrak{h})/\partial t]_\tau\,\mathrm{d}\tau$ a diferenței de sarcină piezometrică dintre cele două acvifere la un moment τ anterior momentului t îi corespunde cu întîrzierea $(t-\tau)$ o variație $\mathfrak{S}'\gamma_{\lambda,\omega}(t-\tau)[-\partial(\delta\mathfrak{h})/\partial t]_\tau\,\mathrm{d}\tau$ a debitului

29

specific transmis local dinspre acviferul subordonat din punct de vedere hidraulic spre cel principal, unde

$$\gamma_{\lambda,\omega}(t-\tau)=\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}(t-\tau)^{\lambda-1}\,e^{-\omega(t-\tau)}$$

reprezintă o familie de funcții cu parametrii λ și ω obținute prin derivarea *integralelor euleriene de speța a doua incomplete* în care $\Gamma(\lambda)$ este *funcția lui Euler de speța a doua* definită pentru $\lambda > 0$, atunci același termen $\rho\mathfrak{R}m_e \mathrm{d}(M/\rho\,\mathfrak{R})/\mathrm{d}t$ la momentul t se exprimă, pentru $\lambda \neq 1$, sub forma generală

$$\rho\mathfrak{R}m_e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{M}{\rho\mathfrak{R}}\right)=-\mathfrak{S}'\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t\left[\frac{\partial(\delta\mathfrak{h})}{\partial t}\right]_{\tau}(t-\tau)^{\lambda-1}\,e^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

sau, pentru $\lambda = 1$ și implicit $\Gamma(\lambda) = 1$ potrivit *schemei lui Boulton* (Boulton, 1954, 1963, 1965; Stallman, 1962), sub forma particulară

$$\rho\mathfrak{R}m_e\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{M}{\rho\mathfrak{R}}\right)=-\mathfrak{S}'\omega\int_0^t\left[\frac{\partial(\delta\mathfrak{h})}{\partial t}\right]_{\tau}e^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Potrivit acestor scheme în care se presupune că $\mathfrak{h}_\infty = const.$, ecuația de difuzivitate hidraulică (7.14) se prezintă, introducînd denivelarea $\mathfrak{h}_\infty - \mathfrak{h} = \delta\mathfrak{h} = \mathfrak{s}$, sub formele

$$\mathfrak{S}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\mathfrak{R}\,\mathrm{div}\,(M\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{s})=-\frac{\mathfrak{R}'}{M'}\mathfrak{s}, \qquad (7.15)$$

$$\mathfrak{S}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\mathfrak{R}\,\mathrm{div}\,(M\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{s})=-\mathfrak{S}'\frac{\omega^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}\right)_{\tau}(t-\tau)^{\lambda-1}\,e^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

(7.15′)

sau

$$\mathfrak{S}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\mathfrak{R}\,\mathrm{div}(M\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{s})=-\mathfrak{S}'\omega\int_0^t\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}\right)_{\tau}e^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \qquad (7.15'')$$

Se conchide că hidrotermoconvecția într-un strat sau sistem fisural de grosime M poate fi determinată prin intermediul ecuației corespunzătoare de difuzivitate hidraulică (7.15), (7.15′) sau (7.15″) și al ecuației de difuzivitate termică (3.36) reluate sub forma

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p \frac{\partial T}{\partial t} - \rho c_p \mathfrak{K}\, \text{grad}\, \mathfrak{h}\, \text{grad}\, T - \text{div}\,(\tilde{\varkappa}\, \text{grad}\, T) = \tilde{\mu}$$

sau

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho c_p \mathfrak{K}\, \text{grad}\, \mathfrak{s}\, \text{grad}\, \theta - \text{div}\,(\tilde{\varkappa}\, \text{grad}\, \theta) = \tilde{\mu} \qquad (7.16)$$

în care $-\mathfrak{K}\, \text{grad}\, \mathfrak{h} = \mathfrak{K}\, \text{grad}\, \mathfrak{s} = m_e \vec{u}$ reprezintă *viteza de filtrație*, iar $\theta = T - T_\infty$ reprezintă diferența dintre temperatura $T = T(t, P)$ la un moment dat t într-un punct P al acviferului și temperatura de referință T_∞ presupusă constantă pentru întregul acvifer sau, mai general, variabilă conform ecuației

$$\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p \frac{\partial T_\infty}{\partial t} + \rho c_p \mathfrak{K}\, \text{grad}\, \mathfrak{s}\, \text{grad}\, T_\infty - \text{div}\,(\tilde{\varkappa}\, \text{grad}\, T_\infty) = 0.$$

În cazul unui acvifer omogen și izotrop cu grosime uniformă, ecuațiile de difuzivitate hidraulică (7.15), (7.15′) sau (7.15″) și de difuzivitate termică (7.16) se prezintă sub formele

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \text{div grad}\, \mathfrak{s} = -\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{B}^2}, \qquad (7.17)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \text{div grad}\, \mathfrak{s} = -\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{K}M} \frac{\omega^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}\right)_\tau (t - \tau)^{\lambda - 1} e^{-\omega(t-\tau)}\, d\tau$$

(7.17′)

sau

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \text{div grad}\, \mathfrak{s} = -\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{K}M}\, \omega \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}\right)_\tau e^{-\omega(t-\tau)}\, d\tau \qquad (7.17'')$$

şi respectiv

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}}\mathfrak{K}\operatorname{grad}\mathfrak{s}\operatorname{grad}\theta-\operatorname{div}\operatorname{grad}\theta=\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}\tag{7.18}$$

în care sînt evidenţiaţi *coeficientul de difuzivitate hidraulică* (*de piezotransmisivitate sau de piezoconductibilitate*)

$$\mathfrak{a}=\frac{\mathfrak{K}M}{\mathfrak{S}},$$

factorul de drenanţă

$$\mathfrak{B}=\sqrt{\frac{\mathfrak{K}MM'}{\mathfrak{K}'}}$$

şi *coeficientul de difuzivitate termică*

$$\tilde{\chi}=\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p}.$$

În general, grad $\mathfrak{s}$ şi grad θ au direcţii şi sensuri diferite, adică formează un unhgi ψ cuprins între 0 şi π, astfel încît produsul lor scalar are expresia

$$\operatorname{grad}\mathfrak{s}\operatorname{grad}\theta=|\operatorname{grad}\mathfrak{s}|\cdot|\operatorname{grad}\theta|\cos\psi,$$

dar, pentru fixarea ideilor, prezentarea următoare a hidrotermoconvecţiei se limitează numai la cazurile extreme în care cei doi gradienţi sînt coliniari de acelaşi sens sau de sensuri opuse şi deci

$$\operatorname{grad}\mathfrak{s}\operatorname{grad}\theta=\pm|\operatorname{grad}\mathfrak{s}|\cdot|\operatorname{grad}\theta|.$$

Utilizînd coordonatele carteziene (x, y, z), cilindrice $(r, r\varphi, z)$ sau sferice $(r, r\vartheta, r\varphi\sin\vartheta)$ şi particularizînd pentru

$$\operatorname{grad}\mathfrak{s}\operatorname{grad}\theta=\pm\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{grad}\mathfrak{s}\operatorname{grad}\theta=\pm\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{r\partial\varphi}\frac{\partial\theta}{r\partial\varphi}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$$

sau

$$\operatorname{grad} \mathfrak{s} \operatorname{grad} \theta = \pm \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{r \partial \vartheta} \frac{\partial \theta}{r \partial \vartheta} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} \frac{\partial \theta}{r \sin \vartheta \partial \varphi} \right),$$

ecuațiile de difuzivitate hidraulică (7.17), (7.17′) sau (7.17″) și de difuzivitate termică (7.18) se aduc respectiv la formele

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial z^2} \right) = - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{B}^2}, \tag{7.19}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial z^2} \right) = - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R} M} \frac{\omega^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \right)_\tau (t - \tau)^{\lambda - 1} e^{-\omega(t - \tau)} \, d\tau \tag{7.19′}$$

sau

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial z^2} \right) = - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R} M} \omega \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \right)_\tau e^{-\omega(t - \tau)} \, d\tau \tag{7.19″}$$

și

$$\frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial t} \pm \frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}} \mathfrak{R} \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}; \tag{7.20}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial z^2} \right] = - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{B}^2}, \tag{7.21}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial z^2} \right] = - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R} M} \frac{\omega^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \right)_\tau (t - \tau)^{\lambda - 1} e^{-\omega(t - \tau)} \, d\tau \tag{7.21′}$$

sau

$$\frac{1}{\mathfrak{a}}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial z^2}\right]=$$

$$=-\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R}M}\,\omega\int_0^t\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}\right)_\tau e^{-\omega(t-\tau)}\,d\tau \qquad (7.21'')$$

și

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}\pm\frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}}\mathfrak{R}\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)-$$

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right]=\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}; \qquad (7.22)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\left[\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial \mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\vartheta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial\varphi^2}\right]=-\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{B}^2}, \qquad (7.23)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\left[\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial \mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\vartheta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial\varphi^2}\right]=-\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R}M}\frac{\omega^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}\right)_\tau(t-\tau)^{\lambda-1}e^{-\omega(t-\tau)}\,d\tau \qquad (7.23')$$

sau

$$\frac{1}{\mathfrak{a}}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}-\left[\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial \mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\vartheta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{r}^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial\varphi^2}\right]=-\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R}M}\,\omega\int_0^t\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}\right)_\tau e^{-\omega(t-\tau)}\,d\tau \qquad (7.23'')$$

și

$$\frac{1}{\tilde{\chi}}\frac{\partial\theta}{\partial t}\pm\frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}}\mathfrak{K}\left(\frac{\partial s}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial s}{\partial\vartheta}\frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial s}{\partial\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}\right]=\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}}. \tag{7.24}$$

Din aceste ecuații de difuzivitate hidraulică și termică se pot deduce, prin integrare, soluțiile fundamentale ale hidrotermoconvecției corespunzătoare condițiilor inițiale și la limite ale sistemelor hidrotermale subterane.

7.2. Hidrotermoconvecția staționară

Într-un acvifer omogen și izotrop cu grosime uniformă în care hidrotermoconvecția este staționară conservativă, ecuațiile de difuzivitate hidraulică și termică numerotate de la (7.19) la (7.24) se particularizează respectiv sub formele corespunzătoare coordonatelor carteziene

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0 \tag{7.25}$$

și

$$\pm\frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}}\mathfrak{K}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)=0, \tag{7.26}$$

corespunzătoare coordonatelor cilindrice

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0 \tag{7.27}$$

şi

$$\pm \frac{\rho c_p}{\varkappa} \Re \left(\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) -$$

$$- \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] = 0 \qquad (7.28)$$

precum şi corespunzătoare coordonatelor sferice

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (7.29)$$

şi

$$\pm \frac{\rho c_p}{\varkappa} \Re \left(\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) -$$

$$- \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \qquad (7.30)$$

În apropierea unei frontiere rectilinii de alimentare cu apă caldă sau rece a unui acvifer mai rece sau respectiv mai cald orizontal sub presiune, hidrotermoconvecţia se menţine, cel puţin provizoriu şi local, practic neschimbată în plane verticale orientate după direcţia curentului acvifer şi considerate $z0x$ cu axa $0x$ orizontală într-un sistem de coordonate carteziene (fig. 7.1), astfel încît, pentru $ds = (\partial s / \partial x)\, dx$ şi $d\theta = (\partial \theta / \partial x)\, dx$, ecuaţiile (7.25) şi (7.26) se prezintă sub formele

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = 0 \qquad (7.31)$$

şi

$$\pm \frac{\rho c_p}{\varkappa} \Re \frac{ds}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0 \qquad (7.32)$$

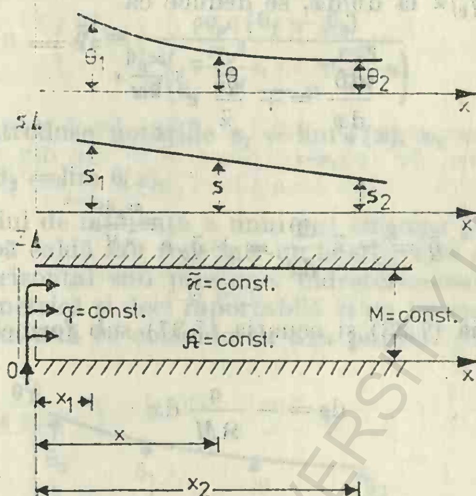


Fig. 7.1. Hidrotermoconvecţia vertical-plană

cu condiţiile

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\frac{q}{\mathfrak{K}M} = const. \tag{7.33}$$

şi

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{1}{\tilde{\varkappa}}\lim_{x\to 0}\left[-\tilde{q}(x)\right] = \mp\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}} = const. \tag{7.34}$$

în care q şi $\tilde{q}$ sînt respectiv *debitul unitar* (debitul pe unitatea de lăţime de front) al curentului acvifer şi densitatea fluxului de termoconvecţie laterală. Prima condiţie rezultă din integrarea ecuaţiei (7.31) şi se utilizează la rezolvarea ecuaţiei (7.32) care devine:

$$\mp\frac{\rho c_p q}{\tilde{\varkappa}M}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{7.35}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}} = \mp\frac{\rho c_p q}{\tilde{\varkappa}M}\mathrm{d}x. \tag{7.36}$$

Prin integrarea acestei ecuații de la $x=0$ la x şi, conform condiției (7.34), de la $\mp\tilde{q}_0/\tilde{\varkappa}$ la $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$, se deduce că

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\mp\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}}\,\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x} \tag{7.37}$$

şi deci

$$\tilde{q}=-\tilde{\varkappa}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\pm\tilde{q}_0\,\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x}. \tag{7.38}$$

Preluînd condiția (7.33) şi ecuația (7.37) sub formele

$$\mathrm{d}\mathfrak{s}=-\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{K}M}\,\mathrm{d}x$$

şi

$$\mathrm{d}\theta=\mp\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}}\,\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x}\,\mathrm{d}x$$

şi integrînd mai întîi de la x_1 la x sau de la x la x_2, iar apoi de la x_1 la x_2, unde $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, se obțin respectiv formulele pentru scăderea de sarcină piezometrică

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1-\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{K}M}(x-x_1)=\mathfrak{s}_2+\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{K}M}(x_2-x) \tag{7.39}$$

şi creşterea de temperatură

$$\theta=\theta_1-\frac{M\tilde{q}_0}{\rho c_p \mathfrak{q}}\left(\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x_1}-\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x}\right)=\theta_2+\frac{M\tilde{q}_0}{\rho c_p \mathfrak{q}}\left(\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x}-\mathrm{e}^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa}M}x_2}\right) \tag{7.40}$$

precum şi pentru debitul unitar al curentului acvifer

$$\mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{K}M(\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s}_2)}{x_2-x_1} \tag{7.41}$$

și densitatea fluxului de termoconvecție laterală

$$\tilde{q}_0 = \frac{\rho c_p q(\theta_1 - \theta_2)}{M\left(e^{\mp\frac{\rho c_p q}{\tilde{\varkappa} M}x_1} - e^{\mp\frac{\rho c_p q}{\tilde{\varkappa} M}x_2}\right)} \tag{7.42}$$

în care sînt introduse notațiile $s_1 = \lim_{x \to x_1} s(x)$, $s_2 = \lim_{x \to x_2} s(x)$, $\theta_1 = \lim_{x \to x_1} \theta(x)$ și $\theta_2 = \lim_{x \to x_2} \theta(x)$.

În domeniul de influență a unui puț singular perfect prin care se injectează apă caldă sau rece într-un acvifer mai rece sau respectiv mai cald orizontal sub presiune, hidrotermoconvecția este, de regulă, axial-simetrică și deci raportabilă la un sistem de coordonate cilindrice a cărui axă $0z$ coincide cu axa puțului (fig. 7.2). Pentru
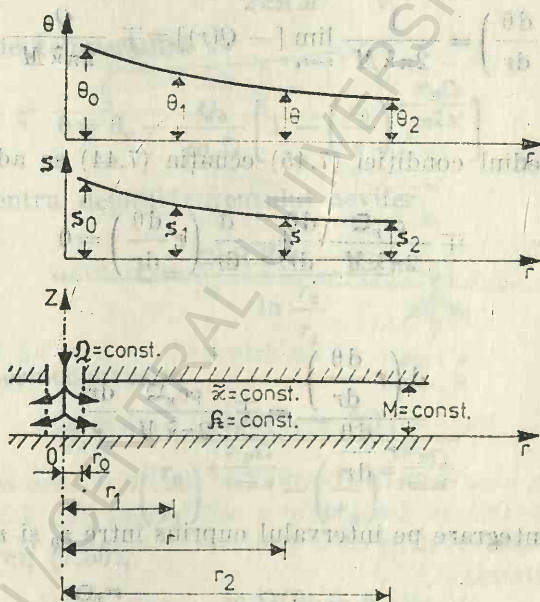


Fig. 7.2. Hidrotermoconvecția axial-simetrică

$ds = (\partial s/\partial r)dr$ și $d\theta = (\partial\theta/\partial r)\,dr$, această hidrotermoconvecție se conformează ecuațiilor

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{ds}{dr}\right) = 0 \tag{7.43}$$

şi

$$\pm \frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}} \mathfrak{K} \frac{d\mathfrak{s}}{dr} \frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = 0 \tag{7.44}$$

corespunzător respectiv cu (7.27) şi (7.28). Dacă prin puţ se transmite în acvifer debitul de apă $\mathfrak{Q} = const.$ şi în sau din acvifer fluxul de termoconvecţie Q, atunci ecuaţiile (7.43) şi (7.44) pot fi preluate cu condiţiile uzuale

$$r \frac{d\mathfrak{s}}{dr} = - \frac{\mathfrak{Q}}{2\pi \mathfrak{K} M} = const. \tag{7.45}$$

şi

$$\lim_{r \to r_0} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi \tilde{\varkappa} M} \lim_{r \to r_0} [-Q(r)] = \mp \frac{Q_0}{2\pi \tilde{\varkappa} M} = const. \tag{7.46}$$

Prin intermediul condiţiei (7.45) ecuaţia (7.44) se aduce la forma

$$\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M} \frac{d\theta}{dr} - \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = 0 \tag{7.47}$$

sau

$$\frac{d\left(r \frac{d\theta}{dr} \right)}{r \frac{d\theta}{dr}} = \mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M} \frac{dr}{r} \tag{7.48}$$

din a cărei integrare pe intervalul cuprins între r_0 şi r rezultă că

$$r \frac{d\theta}{dr} = \mp \frac{Q_0}{2\pi \tilde{\varkappa} M} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}} \tag{7.49}$$

şi deci

$$Q = -2\pi \tilde{\varkappa} M r \frac{d\theta}{dr} = \pm Q_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}}. \tag{7.50}$$

Integrînd condiția (7.45) și ecuația (7.49) preluate sub formele

$$d\mathfrak{s} = \mp \frac{\mathfrak{Q}}{2\pi \mathfrak{R} M} \frac{dr}{r}$$

și

$$d\theta = \mp \frac{Q_0}{2\pi \tilde{\varkappa} M} r_0^{\pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}} r^{\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M} - 1} dr$$

mai întîi între r_0 și r, iar apoi între r_1 și r_2, unde $r_0 \leqslant r$ și $r_0 < r_1 < r_2$, se deduc respectiv formulele pentru scăderea de sarcină piezometrică

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 - \frac{\mathfrak{Q}}{2\pi \mathfrak{R} M} \ln \frac{r}{r_0} \tag{7.51}$$

și creșterea de temperatură

$$\theta = \theta_0 - \frac{Q_0}{\rho c_p \mathfrak{Q}} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}} \right] \tag{7.52}$$

precum și pentru debitul curentului acvifer

$$\mathfrak{Q} = \frac{2\pi \mathfrak{R} M (\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{7.53}$$

și fluxul de termoconvecție

$$Q_0 = \frac{\rho c_p \mathfrak{Q} (\theta_1 - \theta_2)}{\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{\pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}} - \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^{\pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}}} \tag{7.54}$$

sau, potrivit cu (7.50),

$$Q = \pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q} (\theta_1 - \theta_2)}{\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^{\pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi \tilde{\varkappa} M}}} \tag{7.55}$$

în care $\mathfrak{s}_0 = \lim\limits_{r \to r_0} \mathfrak{s}(r)$, $\mathfrak{s}_1 = \lim\limits_{r \to r_1} \mathfrak{s}(r)$, $\mathfrak{s}_2 = \lim\limits_{r \to r_2} \mathfrak{s}(r)$, $\theta_0 = \lim\limits_{r \to r_0} \theta(r)$, $\theta_1 = \lim\limits_{r \to r_1} \theta(r)$ și $\theta_2 = \lim\limits_{r \to r_2} \theta(r)$.

Într-un acvifer rece sau cald omogen și izotrop sub presiune dezvoltat izometric sau stratiform cu mare grosime și deschis practic punctual la marginea sa superioară presupusă orizontală numai prin capătul coloanei unui puț prin care se injectează apă mai caldă sau respectiv mai rece, hidrotermoconvecția dinspre locul de deschidere este, cel puțin pe un sector semisferic limitat, radial-sferică și deci

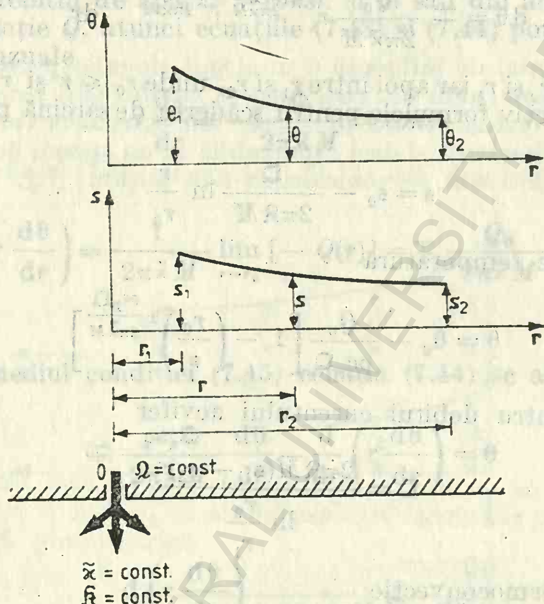


Fig. 7.3. Hidrotermoconvecția radial-sferică

raportabilă la un sistem de coordonate sferice al cărui centru coincide cu centrul locului de deschidere a acviferului (fig. 7.3), astfel încît, pentru $ds = (\partial s/\partial r)\,dr$ și $d\theta = (\partial\theta/\partial r)\,dr$, ecuațiile (7.29) și (7.30) se rețin sub formele

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{ds}{dr}\right)=0 \tag{7.56}$$

și

$$\pm\frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}}\mathfrak{K}\frac{ds}{dr}\frac{d\theta}{dr}-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=0 \tag{7.57}$$

cu condițiile

$$r^2 \frac{ds}{dr} = -\frac{\mathfrak{Q}}{2\pi\mathfrak{K}} = const. \tag{7.58}$$

și

$$\lim_{r\to r_0}\left(r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) = \frac{1}{2\pi\tilde{\varkappa}} \lim_{r\to r_0} [-Q(r)] = \mp \frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa}}, \tag{7.59}$$

unde $\mathfrak{Q}$ și Q reprezintă respectiv debitul curentului de apă și fluxul de termoconvecție în acvifer. Ținînd seamă de condiția (7.58) potrivit căreia ecuația (7.57) poate fi preluată sub forma

$$\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}} \frac{d\theta}{dr} - \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) = 0 \tag{7.60}$$

sau

$$\frac{d\left(r^2 \dfrac{d\theta}{dr}\right)}{r^2 \dfrac{d\theta}{dr}} = \mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}} \frac{dr}{r^2} \tag{7.61}$$

și integrînd de la r_0 la r rezultă că

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = \mp \frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa}} e^{\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} \tag{7.62}$$

și deci

$$Q = -2\pi\tilde{\varkappa} r^2 \frac{d\theta}{dr} = \pm Q_0 e^{\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}. \tag{7.63}$$

Printr-o nouă integrare a condiției (7.58) și a ecuației (7.62) reluate cu formele

$$ds = -\frac{\mathfrak{Q}}{2\pi\mathfrak{K}} \frac{dr}{r^2}$$

și

$$d\theta = \mp \frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa}} e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)} \frac{dr}{r^2}$$

mai întîi între r_1 și r sau între r și r_2, iar apoi între r_1 și r_2, unde $r_1 \leqslant \leqslant r \leqslant r_2$, se obțin respectiv formulele pentru scăderea de sarcină piezometrică

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 - \frac{\mathfrak{Q}}{2\pi\mathfrak{K}}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) = \mathfrak{s}_2 + \frac{\mathfrak{Q}}{2\pi\mathfrak{K}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{7.64}$$

și creșterea de temperatură

$$\theta = \theta_1 - \frac{Q_0}{\rho c_p \mathfrak{Q}}\left[e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)} - e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)}\right] =$$

$$= \theta_2 + \frac{Q_0}{\rho c_p \mathfrak{Q}}\left[e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)} - e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_2}\right)}\right] \tag{7.65}$$

precum și pentru debitul curentului acvifer

$$\mathfrak{Q} = \frac{2\pi\mathfrak{K}(\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2)}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} \tag{7.66}$$

și fluxul de termoconvecție

$$Q_0 = \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}(\theta_1 - \theta_2)}{e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)} - e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_2}\right)}} \tag{7.67}$$

sau, potrivit cu (7.63),

$$Q = \pm \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}(\theta_1 - \theta_2)}{e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)} - e^{\mp\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)}} \tag{7.68}$$

în care $\mathfrak{s}_1 = \lim\limits_{r \to r_1} \mathfrak{s}(r)$, $\mathfrak{s}_2 = \lim\limits_{r \to r_2} \mathfrak{s}(r)$, $\theta_1 = \lim\limits_{r \to r_1} \theta(r)$ și $\theta_2 = \lim\limits_{r \to r_2} \theta(r)$.

În cazul hidrotermoconvecției staționare vertical-plane dintr-o frontieră rectilinie de alimentare cu apă caldă sau rece într-un acvifer mai rece sau respectiv mai cald orizontal sub presiune omogen și izotrop cu grosime uniformă și cu închidere etanșă prin culcușul și acoperișul său, în care factorul de drenanță $\mathfrak{B}$ tinde către infinit și productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică $\tilde{\mu} \mathrm{d} V / \tilde{\rho} \tilde{c}_{\tilde{p}} \mathrm{d} V = \tilde{\mu} / \tilde{\rho} \tilde{c}_{\tilde{p}} = \tilde{\chi} \tilde{\mu} / \tilde{\varkappa}$ depinde de creșterea de temperatură prin funcția

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho} \tilde{c}_{\tilde{p}}} = \tilde{\chi} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}} = -\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\mathrm{B}}^2} \theta,$$

ecuațiile de difuzivitate hidraulică (7.19) și de difuzivitate termică (7.20) se prezintă, pentru $\mathrm{d}\mathfrak{s} = (\partial \mathfrak{s}/\partial x)\,\mathrm{d}x$ și $\mathrm{d}\theta = (\partial \theta/\partial x)\,\mathrm{d}x$, sub formele

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathfrak{s}}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

și

$$\pm \frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}} \mathfrak{K} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\theta}{\tilde{\mathrm{B}}^2} \tag{7.69}$$

cu condițiile uzuale

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{K} M} = const.$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} \right] = \frac{1}{\tilde{\varkappa}} \lim_{x \to 0} [-\tilde{q}(x)] = \mp \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}} = const.,$$

unde $\mathfrak{q}$ și $\tilde{q}$ sînt respectiv *debitul unitar* al curentului acvifer și densitatea fluxului de termoconvecție laterală. Prin intermediul primei condiții, ecuația (7.69) se aduce la forma

$$\mp \frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa} M} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\theta}{\tilde{\mathrm{B}}^2}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}x^2} \pm \frac{\rho c_p \mathfrak{q}}{\tilde{\varkappa} M} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\tilde{\mathrm{B}}^2} \theta = 0 \tag{7.70}$$

cu soluția generală

$$\theta = C_1 \mathrm{e}^{\left[\mp\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x} + C_2 \mathrm{e}^{-\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x}.$$

Întrucît creșterea de temperatură $\theta = \theta(x)$ trebuie să fie finită pentru $x \to \infty$ și totodată să satisfacă condiția $\lim_{x \to 0} [\mathrm{d}\theta(x)/\mathrm{d}x] = \mp \tilde{q}_0/\tilde{\varkappa}$, urmează că

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = \pm \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\varkappa}\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right]}$$

și deci

$$\theta = \pm \frac{\tilde{q}_0 \mathrm{e}^{-\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x}}{\tilde{\varkappa}\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right]}. \tag{7.71}$$

Dacă se cunosc valorile creșterii de temperatură în două puncte situate la distanțele x_1 și x_2 față de frontiera rectilinie de alimentare cu apă, atunci prin aplicarea soluției (7.71) se deduce că densitatea fluxului de termoconvecție laterală are expresia

$$\tilde{q}_0 = \pm \frac{\tilde{\varkappa}\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right](\theta_1 - \theta_2)}{\mathrm{e}^{-\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x_1} - \mathrm{e}^{-\left[\pm\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x_2}}. \tag{7.72}$$

Pentru determinarea completă a acestei hidrotermoconvecții staționare vertical-plane se dispune, pe lîngă formulele (7.71) și (7.72), de formulele (7.39) și (7.41) pentru scăderea de sarcină piezometrică și respectiv pentru debitul unitar al curentului acvifer.

În cazul hidrotermoconvecției staționare axial-simetrice dintr-un puț singular perfect de injecție a apei calde sau reci într-un acvifer mai rece sau respectiv mai cald orizontal sub presiune omogen și izotrop cu grosime uniformă și cu închidere etanșă prin culcușul și acoperișul său, în care factorul de drenanță $\mathfrak{B}$ devine infinit și productivitatea medie de căldură pe unitatea de capacitate calorică $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p = \tilde{\chi}\tilde{\mu}/\tilde{\varkappa}$ variază cu creșterea de temperatură potrivit funcției $\tilde{\mu}/\tilde{c}\,\tilde{\rho}_p = \tilde{\chi}\tilde{\mu}/\tilde{\varkappa} = -(\tilde{\chi}/\tilde{\mathbf{B}}^2)\theta$, ecuațiile de difuzivitate hidraulică (7.21) și de difuzivitate termică (7.22) se rețin respectiv, pentru $\mathrm{d}\mathfrak{s} = (\partial\mathfrak{s}/\partial r)\,\mathrm{d}r$ și $\mathrm{d}\theta = (\partial\theta/\partial r)\mathrm{d}r$, sub formele

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

și

$$\pm\frac{\rho c_p}{\tilde{\varkappa}}\,\mathfrak{K}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\theta}{\tilde{\mathbf{B}}^2}. \tag{7.73}$$

Dacă prin puț acviferul primește debitul de apă $\mathfrak{Q} = const.$ și primește sau cedează fluxul de termoconvecție Q, atunci aceste ecuații de difuzivitate se prezintă cu condițiile

$$r\frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathfrak{Q}}{2\pi\mathfrak{K}M} = const.,$$

$$\lim_{r\to r_0}\theta(r) = \theta_0 = const.$$

sau

$$\lim_{r\to r_0}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{2\pi\tilde{\varkappa}M}\lim_{r\to r_0}[-Q(r)] = \mp\frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa}M} = const.$$

și

$$\lim_{r\to\infty}\theta(r) = finită.$$

Utilizînd prima condiție, ecuația (7.73) poate fi preluată sub forma

$$\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}M}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\theta}{\tilde{\mathbf{B}}^2}$$

sau

$$r^2\frac{d^2\theta}{dr^2}+\left(1\pm\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}M}\right)r\frac{d\theta}{dr}-\frac{r^2}{\tilde{\mathbf{B}}^2}\,\theta=0. \qquad (7.74)$$

Prin schimbarea de funcţie

$$\theta=r^{\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}}\,\Theta$$

care implică

$$\frac{d\theta}{dr}=r^{\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}}\frac{d\Theta}{dr}\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\,r^{\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}-1}\,\Theta$$

şi

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}=r^{\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}}\frac{d^2\Theta}{dr^2}\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}M}\,r^{\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}-1}\frac{d\Theta}{dr}\mp$$

$$\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\left(\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}-1\right)r^{\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}-2}\,\Theta,$$

ecuaţia (7.74) devine :

$$r^2\frac{d^2\Theta}{dr^2}+r\frac{d\Theta}{dr}-\left[\frac{r^2}{\tilde{\mathbf{B}}^2}+\left(\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\right)^2\right]\Theta=0$$

sau

$$\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right)^2\frac{d^2\Theta}{d(r/\tilde{\mathbf{B}})^2}+\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right)\frac{d\Theta}{d(r/\tilde{\mathbf{B}})}-\left[\left(\frac{r}{\tilde{\mathbf{B}}}\right)^2+\left(\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}\right)^2\right]\Theta=0.$$

Întrucît această ecuaţie este de forma *ecuaţiei lui Bessel modificate* în care se evidenţiază ordinul

$$\mp\frac{\rho c_p\mathfrak{Q}}{4\pi\tilde{\varkappa}M}=\nu, \qquad (7.75)$$

urmează că soluția sa generală are expresia

$$\Theta\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) = A\mathrm{I}_\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) + B\mathrm{K}_\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right),$$

unde

$$\mathrm{I}_\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{r}{2\widetilde{\mathrm{B}}}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

și

$$\mathrm{K}_\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) = \frac{\pi\,[\mathrm{I}_{-\nu}(r/\widetilde{\mathrm{B}}) - \mathrm{I}_\nu(r/\widetilde{\mathrm{B}})]}{2\sin\nu\pi}$$

reprezintă *funcțiile lui Bessel modificate de ordinul* ν *și speța întîia* și respectiv *a doua*, iar

$$\Gamma(\nu+n+1) = \int_0^\infty \xi^{\nu+n}\,\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

este *funcția lui Euler de speța a doua* definită pentru $\nu + n + 1 > 0$. Revenind la funcția $\theta = r^\nu\Theta = \widetilde{\mathrm{B}}^\nu(r/\widetilde{\mathrm{B}})^\nu\Theta$ și preluînd soluția generală sub forma

$$\theta\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) = \widetilde{\mathrm{B}}^\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)^\nu\left[A\mathrm{I}_\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) + B\mathrm{K}_\nu\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)\right] \tag{7.76}$$

împreună cu condițiile

$$\lim_{(r/\widetilde{\mathrm{B}})\to(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})} \theta\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) = \tilde{\theta}_0 = const.$$

sau

$$\lim_{(r/\widetilde{\mathrm{B}})\to(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})} \left[\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)\frac{\mathrm{d}\,\theta(r/\widetilde{\mathrm{B}})}{\mathrm{d}(r/\widetilde{\mathrm{B}})}\right] = \mp\frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa} M} = const.$$

și

$$\lim_{(r/\widetilde{\mathrm{B}})\to\infty} \theta\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) = finită \text{ sau } \lim_{(r/\widetilde{\mathrm{B}})\to\infty}\left[\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)^{-\nu}\theta\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)\right] = 0$$

care trebuie să fie satisfăcute pentru orice ordin ν, se deduce mai întîi că $A = 0$ deoarece prin creșterea argumentului $(r/\widetilde{\mathrm{B}})$ funcția $\mathrm{I}_\nu(r/\widetilde{\mathrm{B}})$ crește oricît de mult (vezi tabelul 7.1), iar apoi că

$$B = \frac{\tilde{\theta}_0}{r_0^\nu \mathrm{K}_\nu(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})}$$

Tabelul 7.1

Valorile uzuale ale funcţiilor lui Bessel modificate de speţa întîia şi ordinele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 şi 11 (după Reports of the British Assoc., 1889, 1893, 1896; Gray şi Mathews, 1958)

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$I_0\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_2\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_3\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_4\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_5\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
0,0	1	0	0	0	0	0
0,2	1,01003	0,10050	0,00502	0,00017	$0,00004 \cdot 10^{-1}$	$0,00008 \cdot 10^{-3}$
0,4	1,04040	0,20403	0,02027	0,00135	0,00007	$0,00003 \cdot 10^{-1}$
0,6	1,09205	0,31370	0,04637	0,00460	0,00034	0,00002
0,8	1,16651	0,43286	0,08435	0,01110	0,00110	0,00009
1,0	1,26607	0,56516	0,13575	0,02217	0,00274	0,00027
1,2	1,39373	0,71468	0,20260	0,03936	0,00580	0,00069
1,4	1,55340	0,88609	0,28755	0,06452	0,01103	0,00152
1,6	1,74998	1,08481	0,39397	0,09989	0,01937	0,00304
1,8	1,98956	1,31717	0,52604	0,14819	0,03208	0,00562
2,0	2,27959	1,59064	0,68895	0,21274	0,05073	0,00983
2,2	2,62914	1,91409	0,88906	0,29763	0,07734	0,01637
2,4	3,04926	2,29812	1,13415	0,40787	0,11448	0,02626
2,6	3,55327	2,75538	1,43374	0,54963	0,16537	0,04079
2,8	4,15730	3,30106	1,79940	0,73048	0,23408	0,06169
3,0	4,88079	3,95337	2,24521	0,95975	0,32571	0,09121
3,2	5,74721	4,73425	2,78830	1,24888	0,44665	0,13226
3,4	6,78481	5,67010	3,44946	1,61192	0,60490	0,18861
3,6	8,02768	6,79271	4,25395	2,06610	0,81046	0,26509
3,8	9,51689	8,14042	5,23245	2,63258	1,07575	0,36784
4,0	11,30192	9,75947	6,42219	3,33728	1,41628	0,50472
4,2	13,44246	11,70562	7,86835	4,21195	1,85128	0,68571
4,4	16,01044	14,04622	9,62579	5,29550	2,40465	0,92342
4,6	19,09262	16,86256	11,76107	6,63554	3,10602	1,23378
4,8	22,79368	20,25283	14,35500	8,29034	3,99208	1,63688
5,0	27,23987	24,33564	17,50561	10,33115	5,10823	2,15797
5,2	32,58359	29,25431	21,33194	12,84513	6,51063	2,82877
5,4	39,00879	35,18206	25,97840	15,93880	8,26862	3,68900

5,6	46,73755	42,32829	31,62031	19,74236	10,46778	4,78838
5,8	56,03810	50,94618	38,47045	24,41484	13,21371	6,18903
6,0	67,23441	61,34194	46,78709	30,15054	16,63655	7,96847

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$I_6\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_7\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_8\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_9\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_{10}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$I_{11}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
0,0	0	0	0	0	0	0
0,2	$0,00001 \cdot 10^{-4}$	$0,00002 \cdot 10^{-6}$	$0,00002 \cdot 10^{-8}$	$0,00003 \cdot 10^{-10}$	$0,00003 \cdot 10^{-12}$	$0,00003 \cdot 10^{-11}$
0,4	$0,00009 \cdot 10^{-3}$	$0,00003 \cdot 10^{-4}$	$0,00006 \cdot 10^{-6}$	$0,00001 \cdot 10^{-7}$	$0,00003 \cdot 10^{-9}$	$0,00005 \cdot 10^{-14}$
0,6	$0,00001 \cdot 10^{-1}$	$0,00004 \cdot 10^{-3}$	$0,00002 \cdot 10^{-4}$	$0,00005 \cdot 10^{-6}$	$0,00002 \cdot 10^{-7}$	$0,00004 \cdot 10^{-9}$
0,8	$0,00006 \cdot 10^{-1}$	$0,00003 \cdot 10^{-2}$	$0,00002 \cdot 10^{-3}$	$0,00007 \cdot 10^{-5}$	$0,00003 \cdot 10^{-6}$	$0,00001 \cdot 10^{-7}$
1,0	0,00002	$0,00002 \cdot 10^{-1}$	$0,00001 \cdot 10^{-2}$	$0,00006 \cdot 10^{-4}$	$0,00003 \cdot 10^{-5}$	$0,00001 \cdot 10^{-6}$
1,2	0,00007	$0,00006 \cdot 10^{-1}$	$0,00004 \cdot 10^{-2}$	$0,00003 \cdot 10^{-3}$	$0,00002 \cdot 10^{-4}$	$0,00009 \cdot 10^{-6}$
1,4	0,00018	0,00002	$0,00002 \cdot 10^{-1}$	$0,00001 \cdot 10^{-2}$	$0,00008 \cdot 10^{-4}$	$0,00005 \cdot 10^{-5}$
1,6	0,00040	0,00005	$0,00004 \cdot 10^{-1}$	$0,00004 \cdot 10^{-2}$	$0,00003 \cdot 10^{-3}$	$0,00002 \cdot 10^{-4}$
1,8	0,00083	0,00010	0,00001	$0,00001 \cdot 10^{-1}$	$0,00001 \cdot 10^{-2}$	$0,00008 \cdot 10^{-4}$
2,0	0,00160	0,00022	0,00003	$0,00003 \cdot 10^{-1}$	$0,00003 \cdot 10^{-2}$	$0,00003 \cdot 10^{-3}$
2,2	0,00292	0,00045	0,00006	$0,00007 \cdot 10^{-1}$	$0,00008 \cdot 10^{-2}$	$0,00008 \cdot 10^{-3}$
2,4	0,00508	0,00085	0,00012	0,00002	$0,00002 \cdot 10^{-1}$	$0,00002 \cdot 10^{-2}$
2,6	0,00850	0,00153	0,00024	0,00003	$0,00004 \cdot 10^{-1}$	$0,00005 \cdot 10^{-2}$
2,8	0,01377	0,00266	0,00045	0,00007	0,00001	$0,00001 \cdot 10^{-1}$
3,0	0,02168	0,00447	0,00081	0,00013	0,00002	$0,00003 \cdot 10^{-1}$
3,2	0,03332	0,00729	0,00141	0,00024	0,00004	$0,00005 \cdot 10^{-1}$
3,4	0,05015	0,01160	0,00237	0,00043	0,00007	0,00001
3,6	0,07411	0,01806	0,00389	0,00075	0,00013	0,00002
3,8	0,10776	0,02755	0,00624	0,00127	0,00023	0,00004
4,0	0,15446	0,04133	0,00981	0,00209	0,00040	0,00007
4,2	0,21863	0,06105	0,01514	0,00337	0,00068	0,00013
4,4	0,30598	0,08894	0,02299	0,00534	0,00113	0,00022
4,6	0,42389	0,12798	0,03440	0,00832	0,00183	0,00037
4,8	0,58191	0,18210	0,05080	0,01277	0,00292	0,00061
5,0	0,79229	0,25649	0,07412	0,01932	0,00458	0,00100
5,2	1,07069	0,35796	0,10696	0,02885	0,00709	0,00160
5,4	1,43713	0,49538	0,15281	0,04260	0,01082	0,00252
5,6	1,91710	0,68031	0,21633	0,06222	0,01632	0,00393
5,8	2,54297	0,92771	0,30367	0,09000	0,02435	0,00605
6,0	3,35577	1,25692	0,42297	0,12901	0,03594	0,00921

Tabelul 7.2.

Valorile uzuale ale funcțiilor lui Bessel modificate de speța a doua și ordinele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și 10 (după Aldis, 1894; Isherwood, 1904)

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_0\left(\frac{r}{\tilde{K}}\right)$	$K_1\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_2\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_3\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_4\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_5\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
0,2	1,75270	4,77597	49,512	995,02	29900	$11970 \cdot 10^2$
0,4	1,11453	2,18435	12,036	122,55	1850,2	37127
0,6	0,77752	1,30283	5,1203	35,438	359,50	4828,8
0,8	0,56535	0,86178	2,7198	14,461	111,17	1126,2
1,0	0,42102	0,60191	1,6248	7,1013	44,232	360,96
1,2	0,31851	0,43459	1,0428	3,9106	20,596	141,22
1,4	0,24366	0,32084	0,70199	2,3265	10,673	63,314
1,6	0,18795	0,24063	0,48874	1,4625	5,9731	31,328
1,8	0,14593	0,18262	0,34884	0,95783	3,5416	16,698
2,0	0,11389	0,13987	0,25376	0,64738	2,1959	9,4310
2,2	0,08927	0,10790	0,18736	0,44854	1,4106	5,5782
2,4	0,07022	0,08372	0,13999	0,31704	0,93258	3,4256
2,6	0,05540	0,06528	0,10562	0,22777	0,63124	2,1700
2,8	0,04382	0,05111	0,08033	0,16587	0,43575	1,4108
3,0	0,03474	0,04016	0,06151	0,12217	0,30585	0,93776
3,2	0,02759	0,03164	0,04737	0,09086	0,21773	0,63517
3,4	0,02196	0,02500	0,03666	0,06813	0,15689	0,43729
3,6	0,01750	0,01979	0,02850	0,05146	0,11425	0,30536
3,8	0,01397	0,01571	0,02223	0,03911	0,08398	0,21591
4,0	0,01116	0,01248	0,01740	0,02988	0,06223	0,15434
4,2	0,00893	0,00994	0,01366	0,02295	0,04644	0,11140
4,4	0,00715	0,00792	0,01075	0,01770	0,03488	0,08112
4,6	0,00573	0,00633	0,00848	0,01370	0,02635	0,05952
4,8	0,00460	0,00506	0,00670	0,01064	0,02000	0,04398
5,0	0,00369	0,00404	0,00531	0,00829	0,01526	0,03270

(continuare tabel 7.2)

$\frac{r}{\tilde{B}}$	$K_6\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_7\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_8\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_9\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$	$K_{10}\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)$
0,2	$59880 \cdot 10^2$	$35940 \cdot 10^5$	$25164 \cdot 10^7$	$20135 \cdot 10^9$	$18124 \cdot 10^{11}$
0,4	$93003 \cdot 10$	$27938 \cdot 10^3$	$97876 \cdot 10^4$	$39178 \cdot 10^6$	$17640 \cdot 10^8$
0,6	80839	$16216 \cdot 10^2$	$37918 \cdot 10^3$	$10128 \cdot 10^5$	$30422 \cdot 10^6$
0,8	14189	$21396 \cdot 10$	$37585 \cdot 10^2$	$75383 \cdot 10^3$	$16999 \cdot 10^5$
1,0	3653,8	44207	$62255 \cdot 10$	$10005 \cdot 10^3$	$18071 \cdot 10^4$
1,2	1197,4	12115	$14254 \cdot 10$	$19126 \cdot 10^2$	$28832 \cdot 10^3$
1,4	462,92	4031,2	40775	$47003 \cdot 10$	$60839 \cdot 10^2$
1,6	201,77	1544,6	13717	$13872 \cdot 10$	$15743 \cdot 10^2$
1,8	96,310	658,77	5220,0	47059	$47581 \cdot 10$
2,0	49,351	305,54	2188,1	17810	$16248 \cdot 10$
2,2	26,766	151,57	991,33	7361,2	61219
2,4	15,206	79,456	478,70	3270,8	25009
2,6	8,9775	43,605	243,77	1543,7	10931
2,8	5,4742	24,872	129,83	766,78	5059,1
3,0	3,4317	14,664	71,866	397,95	2459,5
3,2	2,2026	8,8950	41,118	214,49	1247,6
3,4	1,4430	5,5302	24,214	119,48	656,75
3,6	0,96246	3,5135	14,626	68,519	357,22
3,8	0,65215	2,2753	9,0350	40,317	200,01
4,0	0,44807	1,4985	5,6930	24,271	114,91
4,2	0,31169	1,0019	3,6515	14,912	67,561
4,4	0,21923	0,67903	2,3798	9,3127	40,477
4,6	0,15574	0,46580	1,5734	5,9385	24,811
4,8	0,11163	0,32306	1,0539	3,8360	15,439
5,0	0,08067	0,22630	0,71409	2,5114	9,7550

sau respectiv

$$B = \pm \frac{\widetilde{\mathrm{B}} Q_0}{2\pi \tilde{\varkappa} M r_0^{\nu+1} \mathrm{K}_{\nu-1}(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})}$$

deoarece $\mathrm{d}[(r/\widetilde{\mathrm{B}})^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(r/\widetilde{\mathrm{B}})]/\mathrm{d}(r/\widetilde{\mathrm{B}}) = -(r/\widetilde{\mathrm{B}})^{\nu}\mathrm{K}_{\nu-1}(r/\widetilde{\mathrm{B}})$. Prin urmare, potrivit cu (7.76), soluția căutată pentru ecuația (7.74) se reține respectiv sub una din formele

$$\theta = \tilde{\theta}_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu} \frac{\mathrm{K}_{\nu}(r/\widetilde{\mathrm{B}})}{\mathrm{K}_{\nu}(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})} \tag{7.77}$$

sau

$$\theta = \pm \frac{\widetilde{\mathrm{B}} Q_0}{2\pi \tilde{\varkappa} M r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu} \frac{\mathrm{K}_{\nu}(r/\widetilde{\mathrm{B}})}{\mathrm{K}_{\nu-1}(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})}, \tag{7.78}$$

unde $\tilde{\theta}_0 = \theta(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})$. Valorile uzuale ale funcției $\mathrm{K}_{\nu}(r/\widetilde{\mathrm{B}})$ sînt înscrise în tabelul 7.2. La o depărtare oarecare r față de puțul de injecție, fluxul de termoconvecție

$$Q = -2\pi \tilde{\varkappa} M r \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = -2\pi \tilde{\varkappa} M \left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}(r/\widetilde{\mathrm{B}})}$$

se prezintă, corespunzător cu (7.77) sau (7.78), astfel:

$$Q = \frac{2\pi \tilde{\varkappa} M \tilde{\theta}_0}{(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})} \left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)^{\nu+1} \mathrm{K}_{\nu-1}\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) \tag{7.79}$$

sau

$$Q = \pm \frac{Q_0}{(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})^{\nu+1}\mathrm{K}_{\nu-1}(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})} \left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right)^{\nu+1} \mathrm{K}_{\nu-1}\left(\frac{r}{\widetilde{\mathrm{B}}}\right) =$$

$$= \pm Q_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu+1} \frac{\mathrm{K}_{\nu-1}(r/\widetilde{\mathrm{B}})}{\mathrm{K}_{\nu-1}(r_0/\widetilde{\mathrm{B}})}. \tag{7.80}$$

Aplicînd soluția (7.78) atunci cînd se cunosc valorile creșterii de temperatură în două puncte ale acviferului situate la distanțele r_1 și r_2

față de puțul de injecție, se găsește că fluxul de termoconvecție prin suprafața laterală $2\pi r_0 M$ are expresia

$$Q_0 = \pm \frac{2\pi \tilde{\varkappa} M (r_0/\widetilde{\mathbf{B}})^{\nu+1} \mathbf{K}_{\nu-1}(r_0/\widetilde{\mathbf{B}})}{(r_1/\widetilde{\mathbf{B}})^{\nu} \mathbf{K}_{\nu}(r_1/\widetilde{\mathbf{B}}) - (r_2/\widetilde{\mathbf{B}})^{\nu} \mathbf{K}_{\nu}(r_2/\widetilde{\mathbf{B}})} (\theta_1 - \theta_2), \tag{7.81}$$

iar fluxul de termoconvecție prin suprafața laterală $2\pi r M$ se prezintă, ținînd seamă de (7.80), sub forma

$$Q = \frac{2\pi \tilde{\varkappa} M (r/\widetilde{\mathbf{B}})^{\nu+1} \mathbf{K}_{\nu-1}(r/\widetilde{\mathbf{B}})}{(r_1/\widetilde{\mathbf{B}})^{\nu} \mathbf{K}_{\nu}(r_1/\widetilde{\mathbf{B}}) - (r_2/\widetilde{\mathbf{B}})^{\nu} \mathbf{K}_{\nu}(r_2/\widetilde{\mathbf{B}})} (\theta_1 - \theta_2). \tag{7.82}$$

Această hidrotermoconvecție staționară axial-simetrică poate fi complet determinată numai dacă formulelor (7.77) și (7.79) sau (7.78) și (7.82) li se adaugă formulele (7.51) și (7.53) deduse anterior pentru scăderea de sarcină piezometrică și respectiv pentru debitul curentului acvifer.

7.3. Hidrotermoconvecția nestaționară

Pentru prezentarea hidrotermoconvecției nestaționare se convine ca ecuațiile de difuzivitate hidraulică (7.19), (7.19′) sau (7.19″) și de difuzivitate termică (7.20) să fie preluate sub formele

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \mathfrak{a}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial z^2}\right) = -\mathfrak{m} \tag{7.83}$$

și

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \pm \frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\, \tilde{c}_p} \mathfrak{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) -$$

$$- \tilde{\chi}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\, \tilde{c}_p}, \tag{7.84}$$

unde $\mathfrak{m}$ și $\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p$ sînt, în general, funcții de timp și de punct. În cazul hidrotermoconvecției orizontale, în care $\partial\mathfrak{s}/\partial z = 0$ și $\partial\theta/\partial z = 0$, ecuațiile (7.83) și (7.84) se reduc respectiv la formele

$$\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t} - \mathfrak{a}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial y^2}\right) = -\mathfrak{m} \tag{7.85}$$

și

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \pm \frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p}\,\mathfrak{K}\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) - \tilde{\chi}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_p}. \tag{7.86}$$

Aceste ecuații pot fi integrate numeric (Courant et al., 1928; Peaceman și Rachford, 1955; Douglas, 1956, 1961; Richtmyer, 1957; Collatz, 1960; Forsythe și Wasow, 1960; Lax, 1965; Isaacson și Keller, 1966; Godunov și Reabenikii, 1973; Garçon, 1981; Enăchescu și Albu, 1982), cunoscînd condițiile inițiale date prin valorile funcțiilor $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(t, x, y)$ și $\theta = \theta(t, x, y)$ la un anumit moment t_0, precum și condițiile la limite date prin valorile funcțiilor (de *tip Dirichlet*) sau ale derivatelor lor normale (de *tip Neumann*) sau încă ale unor combinații liniare ale funcțiilor și derivatelor lor normale (de *tip Fourier*) pe frontierele domeniului de hidrotermoconvecție. Dacă se divide timpul în intervale egale $\Delta t = \tau$ și domeniul printr-o rețea pătratică cu intervale $\Delta x = \Delta y = \lambda$, se notează cu $\mathfrak{s}_{n,i,j} = \mathfrak{s}(n\tau, i\lambda, j\lambda)$ și $\theta_{n,i,j} = \theta(n\tau, i\lambda, j\lambda)$ creșterile de sarcină piezometrică și de temperatură la momentul n în punctul (i, j) și se folosesc operatorii cu diferențe progresive pentru derivatele locale și cu diferențe centrale atît pentru derivatele parțiale în raport cu coordonatele spațiale cît și pentru laplacean, atunci ecuațiile cu derivate parțiale (7.85) și (7.86) se transpun respectiv sub formele ecuațiilor cu diferențe finite

$$\frac{\mathfrak{s}_{n+1,i,j} - \mathfrak{s}_{n,i,j}}{\tau} - \mathfrak{a}_{n,i,j}\left(\frac{\dfrac{\mathfrak{s}_{n,i+1,j} - \mathfrak{s}_{n,i,j}}{\lambda} - \dfrac{\mathfrak{s}_{n,i,j} - \mathfrak{s}_{n,i-1,j}}{\lambda}}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{\dfrac{\mathfrak{s}_{n,i,j+1} - \mathfrak{s}_{n,i,j}}{\lambda} - \dfrac{\mathfrak{s}_{n,i,j} - \mathfrak{s}_{n,i,j-1}}{\lambda}}{\lambda}\right) = -\mathfrak{m}_{n,i,j} \tag{7.87}$$

şi

$$\frac{\theta_{n+1,i,j}-\theta_{n,i,j}}{\tau} \pm \left(\frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}}\,\mathfrak{R}\right)_{n,i,j}\left(\frac{\mathfrak{s}_{n,i+1,j}-\mathfrak{s}_{n,i-1,j}}{2\lambda}\cdot\frac{\theta_{n,i+1,j}-\theta_{n,i-1,j}}{2\lambda}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathfrak{s}_{n,i,j+1}-\mathfrak{s}_{n,i,j-1}}{2\lambda}\cdot\frac{\theta_{n,i,j+1}-\theta_{n,i,j-1}}{2\lambda}\right)-$$

$$-\tilde{\chi}_{n,i,j}\left(\frac{\dfrac{\theta_{n,i+1,j}-\theta_{n,i,j}}{\lambda}-\dfrac{\theta_{n,i,j}-\theta_{n,i-1,j}}{\lambda}}{\lambda}+\right.$$

$$\left.+\frac{\dfrac{\theta_{n,i,j+1}-\theta_{n,i,j}}{\lambda}-\dfrac{\theta_{n,i,j}-\theta_{n,i,j-1}}{\lambda}}{\lambda}\right)=\left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}}\right)_{n,i,j} \qquad (7.88)$$

din care se obţin relaţiile

$$\mathfrak{s}_{n+1,i,j}-\left(1-\frac{4\tau}{\lambda^2}\,\mathfrak{a}_{n,i,j}\right)\mathfrak{s}_{n,i,j}=$$

$$=\frac{\tau\mathfrak{a}_{n,i,j}}{\lambda^2}(\mathfrak{s}_{n,i-1,j}+\mathfrak{s}_{n,i+1,j}+\mathfrak{s}_{n,i,j-1}+\mathfrak{s}_{n,i,j+1})-\tau\mathfrak{m}_{n,i,j} \qquad (7.89)$$

şi

$$\theta_{n+1,i,j}-\left(1-\frac{4\tau}{\lambda^2}\,\tilde{\chi}_{n,i,j}\right)\theta_{n,i,j}=$$

$$=\frac{\tau\tilde{\chi}_{n,i,j}}{\lambda^2}(\theta_{n,i-1,j}+\theta_{n,i+1,j}+\theta_{n,i,j-1}+\theta_{n,i,j+1})\mp$$

$$\mp\frac{\tau}{4\lambda^2}\left(\frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}}\,\mathfrak{R}\right)_{n,i,j}[(\mathfrak{s}_{n,i+1,j}-\mathfrak{s}_{n,i-1,j})(\theta_{n,i+1,j}-\theta_{n,i-1,j})+$$

$$+(\mathfrak{s}_{n,i,j+1}-\mathfrak{s}_{n,i,j-1})(\theta_{n,i,j+1}-\theta_{n,i,j-1})]+\tau\left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\,\tilde{c}_{\tilde{p}}}\right)_{n,i,j}, \qquad (7.90)$$

unde $\mathfrak{a}_{n,i,j}$, $\tilde{\chi}_{n,i,j}$ şi $(\rho c_p\mathfrak{R}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})_{n,i,j}$ pot fi numai pozitivi, iar $\mathfrak{m}_{n,i,j}$ şi $(\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})_{n,i,j}$ pot fi pozitivi sau negativi. Pentru a se asigura conver-

genţa şi stabilitatea soluţiilor celor două ecuaţii cu diferenţe finite (Evans et al., 1954 ; Douglas, 1956 ; Albu şi Pricăjan, 1980), trebuie ca intervalele τ şi λ să se aleagă astfel încît să fie satisfăcute condiţiile

$$0 \leqslant 1 - \frac{4\tau}{\lambda^2} a_{n,i,j} < 1,$$

$$0 \leqslant 1 - \frac{4\tau}{\lambda^2} \tilde{\chi}_{n,i,j} < 1,$$

$$0 \leqslant \frac{\tau}{\lambda^2} \left[\tilde{\chi}_{n,i,j} \mp \frac{1}{4} \left(\frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}}} \mathfrak{K} \right)_{n,i,j} (s_{n,i+1,j} - s_{n,i-1,j}) \right] < 1$$

şi

$$0 \leqslant \frac{\tau}{\lambda^2} \left[\tilde{\chi}_{n,i,j} \mp \frac{1}{4} \left(\frac{\rho c_p}{\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}}} \mathfrak{K} \right)_{n,i,j} (s_{n,i,j+1} - s_{n,i,j-1}) \right] < 1$$

dintre care penultima şi ultima reprezintă condiţii de convergenţă şi stabilitate locală deduse şi comunicate verbal de D. Enăchescu (1981).

Coeficienţii $a_{n,i,j}$, $\tilde{\chi}_{n,i,j}$, $(\rho c_p \mathfrak{K}/\tilde{\rho}\, \tilde{c}_{\tilde{p}})_{n,i,j}$, $m_{n,i,j}$ şi $(\tilde{\mu}/\tilde{\rho}\tilde{c}_{\tilde{p}})_{n,i,j}$ pot fi evaluaţi, utilizînd *metoda celor mai mici pătrate*, prin intermediul sistemului celor două ecuaţii cu diferenţe finite aplicate sub formele (7.89) şi (7.90) repetat în nodurile reţelei pătratice la momentele la care se dispune de măsurători periodice ale creşterilor de sarcină piezometrică şi de temperatură pe domeniul de hidrotermoconvecţie. Dacă valorile creşteriilor de sarcină piezometrică şi de temperatură sînt cunoscute în nodurile reţelei pătratice la cel puţin patru momente, atunci cei cinci coeficienţi presupuşi independenţi de timp pe durata dintre momentul iniţial şi momentul final se determină cu valori medii locale obţinute prin metoda celor mai mici pătrate pentru sistemele de cîte cel puţin $2 \times 1 \times 3 = 6$ ecuaţii corespunzătoare fiecărui nod al reţelei şi celor cel puţin trei intervale disponibile de timp. În cazul în care valorile creşterilor de sarcină piezometrică şi de temperatură sînt cunoscute în nodurile reţelei pătratice la numai două momente, cei cinci coeficienţi se pot determina cu valori medii zonale obţinute prin aceeaşi metodă a celor mai mici pătrate pentru sistemele de cîte $2 \times 4 \times 1 = 8$ ecuaţii corespunzătoare celor patru vîrfuri ale fiecărui pătrat al reţelei şi singurului interval disponibil de timp. Menţionînd dificultatea determinării lor prin alte metode, se conchide că cei cinci coeficienţi

pot fi evaluaţi pentru orice sistem hidrotermal care evoluează în regim nestaţionar pe baza hărţilor cu hidroizopieze şi cu hidroizoterme la cel puţin două momente separate prin intervale adecvate de timp (cu durate de ordinul zilelor, zecilor sau sutelor de zile) pe un domeniu reprezentativ presupus acoperit cu o reţea pătratică convenabilă (cu intervale de ordinul sutelor sau miilor de metri) astfel încît aplicabilitatea ecuaţiilor cu diferenţe finite să fie justificată.

După evaluarea celor cinci coeficienţi, aceleaşi ecuaţii cu diferenţe finite pot fi reluate sub formele (7.89) şi (7.90) ca *relaţii de recurenţă* pentru calculul valorilor de prognoză ale creşterilor de sarcină piezometrică şi de temperatură în orice punct al domeniului de hidrotermoconvecţie la un moment ulterior ultimului moment la care se dispune de valori măsurate. O astfel de prevedere a evoluţiei în ansamblu a sarcinii piezometrice şi temperaturii este posibilă atît timp cît nu se produc modificări esenţiale ale condiţiilor pe frontierele sistemului hidrotermal.

Practic, pe domeniul unui sistem hidrotermal şi pe frontierele sale cîmpurile $s = s(t, x, y)$ şi $\theta = \theta(t, x, y)$ se determină pe baza unor valori locale obţinute prin măsurători periodice ale sarcinii piezometrice şi temperaturii în puncte de observaţie (puţuri şi emergenţe naturale) dispuse la intervale în general inegale. Interpretînd distribuţia valorilor locale în corelaţie cu condiţiile specifice ale sistemului hidrotermal, se întocmesc hărţi cu reprezentările succesive ale celor două cîmpuri pe domeniul investigat presupus acoperit cu o reţea pătratică convenabilă în ale cărei puncte nodale se estimează, pe baza hărţilor respective, valorile creşterilor de sarcină piezometrică şi de temperatură la momentele succesive considerate, astfel încît să fie justificată aplicabilitatea ecuaţiilor (7.89) şi (7.90). Prin intermediul acestor ecuaţii este posibilă nu numai determinarea coeficienţilor şi prevederea evoluţiei sistemului hidrotermal într-o variantă dată de exploatare, dar şi simularea comportării sale (Lasseter şi Witherspoon, 1975; Albu şi Enăchescu, 1981) in alte variante corespunzătoare altor distribuţii ale surselor de exploatare sau de injecţie pe domeniul investigat şi ale debitelor pe surse.

7.4. Identificarea sistemelor hidrotermale şi evaluarea resurselor lor disponibile

Sistemele hidrotermale pot fi deschise sau cvasideschise din punct de vedere termodinamic (schimbă căldură cu exteriorul lor) şi deschise sau cvasiînchise din punct de vedere hidrodinamic (schimbă

apă cu exteriorul lor prin frontiere de alimentare sau prin frontiere cvasietanșe). Gradul de închidere a sistemelor hidrotermale condiționează esențial comportarea lor în exploatare, deoarece în cazul sistemelor cvasiînchise evoluția se caracterizează prin diminuarea treptată a sarcinii piezometrice și prin relativa menținere a temperaturii apei extrase datorită unei realimentări lente dinspre exterior cu debite inferioare celor de exploatare, iar în cazul sistemelor deschise evoluția se prezintă invers datorită unei realimentări rapide cu apă rece dinspre exterior cu debite suficient de mari pentru compensarea debitelor de exploatare. Utilizînd graficul variației în timp a sumei fluxurilor (debitelor) de căldură prin sursele hidrotermale, varianta optimă de exploatare trebuie să fie aleasă în primul caz astfel încît să se obțină cantitatea maximă de căldură recuperabilă într-un interval limitat de timp pînă la un prag inferior de temperatură, iar în al doilea caz astfel încît să se obțină cantitatea maximă de căldură recuperabilă într-un interval de timp cît mai lung posibil (chiar nelimitat) pînă la un prag inferior de temperatură. Ca urmare, resursele hidrotermale disponibile pot fi considerate regenerabile pentru o durată nelimitată numai dacă prin exploatare viteza de aflux a apei nu depășește o viteză maxim admisibilă pentru încălzirea ei suficientă de la rocile cu care vine în contact pe parcursul subteran, în condițiile fluxului obișnuit de termoconducție ascensională cu densitatea limitată la 50 — 100 mW/m². Evaluarea resurselor hidrotermale disponibile implică deci determinarea posibilităților de debitare ale sistemelor hidrotermale în condițiile exploatării optime corespunzătoare regenerării lor naturale și artificiale.

Dacă nu se cunosc condițiile de exploatare optimă a sistemelor hidrotermale, atunci resursele lor disponibile nu pot fi determinate decît prin metode hidrogeologice clasice, dintre care cele mai frecvent utilizate sînt metoda fizică-hidrogeologică și metoda răspunsurilor impulsionale (black box).

Metoda fizică-hidrogeologică este derivată din metoda fizică de identificare a sistemelor (Emsellem, 1971) și constă în a diseca fiecare sistem investigat, astfel încît să i se evidențieze structura și să se determine valorile parametrilor caracteristici blocurilor componente, iar ulterior pe baza analizei comportării sistemului să se deducă relațiile între blocuri și legile fizice corespunzătoare ansamblului, urmărind ca modelul adoptat să se apropie cît mai mult de realitate. În esență, sistemul hidrotermal se conturează și se testează prin lucrările de cercetare hidrogeologică dispuse după rețele corespunzătoare etapelor succesive de investigare a sistemului (fig. 7.4) în care se individualizează blocuri componente caracterizate prin

hidroproductivitatea de volum $\mathfrak{Q}_{ex_i}/V_i$ definită prin raportul dintre debitul optim exploatabil $\mathfrak{Q}_{ex_i}$ şi volumul domeniului de influenţă V_i aferent fiecărei surse i prevăzute pentru exploatare. Debitul optim exploatabil $\mathfrak{Q}_{ex_i}$ de apă subterană termală se determină pe baza rezultatelor încercărilor experimentale în regim staţionar sau cel

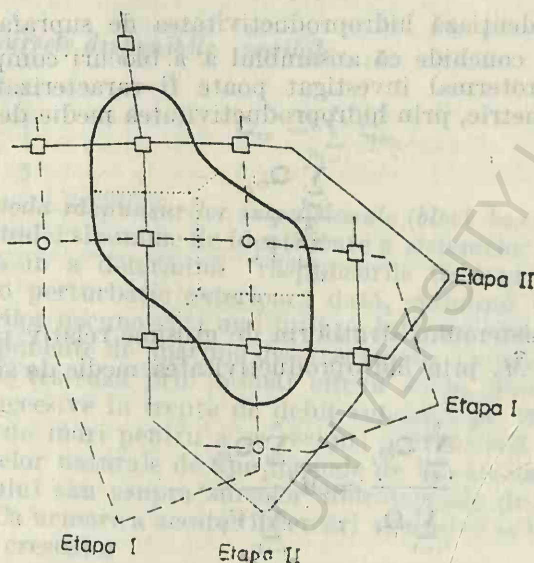


Fig.7.4. Conturarea şi testarea unui sistem hidrotermal prin lucrări de cercetare hidrogeologică dispuse după reţele corespunzătoare etapelor succesive de investigare

puţin cvasistaţionar prin care se stabilesc corelaţiile atît între valorile debitului şi denivelării cît şi între valorile debitului şi ale temperaturii şi eventual mineralizaţiei apei (Albu şi Hinculov, 1975), impunînd condiţiile ca viteza apei la intrarea în sursă să nu depăşească viteza maxim admisibilă în funcţie de granulometria rocii acvifere, iar temperatura şi mineralizaţia apei să se menţină în limitele admise în funcţie de exigenţele consumatorilor. Volumul domeniului de influenţă V_i se poate exprima prin produsul între grosimea sistemului hidrotermal M_i stabilită prin sursa i sau estimată pe baza considerentelor de ordin structural şi aria suprafeţei de influenţă Ω_i cores-

punzătoare sursei i determinată prin interpretarea rezultatelor încercărilor experimentale, astfel încît hidroproductivitatea de volum poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathfrak{Q}_{ex_i}}{V_i}=\frac{1}{M_i}\cdot\frac{\mathfrak{Q}_{ex_i}}{\Omega_i}$$

în care se evidențiază hidroproductivitatea de suprafață $\mathfrak{Q}_{ex_i}/\Omega_i$. Sintetizînd, se conchide că ansamblul a n blocuri componente ale sistemului hidrotermal investigat poate fi caracterizat, în cazul sistemului izometric, prin hidroproductivitatea medie de volum

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{Q}_{ex_i}}{\sum_{i=1}^{n}V_i}$$

sau, în cazul sistemului stratiform de grosime relativ uniformă cu valoarea medie $\widetilde{M}$, prin hidroproductivitatea medie de suprafață

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{Q}_{ex_i}}{\sum_{i=1}^{n}\Omega_i}=\widetilde{M}\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{Q}_{ex_i}}{\sum_{i=1}^{n}V_i}.$$

Corespunzător acestor două cazuri, resursele disponibile globale $\mathfrak{Q}_{ex}$ de ape termale ale întregului sistem se evaluează respectiv prin intermediul relațiilor

$$\mathfrak{Q}_{ex}=V\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{Q}_{ex_i}}{\sum_{i=1}^{n}V_i}$$

sau

$$\mathfrak{Q}_{ex}=\Omega\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{Q}_{ex_i}}{\sum_{i=1}^{n}\Omega_i}$$

și cuprind, în funcție de gradul de cunoaștere realizat, atît *resursele disponibile probabile*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_{ex_i}$$

cît și *resursele disponibile posibile*

$$\mathfrak{Q}_{ex} - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_{ex_i}.$$

Metoda răspunsurilor impulsionale (*black box*) rezultă din aplicarea metodei sinonime de identificare a sistemelor (Emsellem, 1971) și constă în a determina răspunsurile fiecărui sistem investigat față de o perturbație exterioară dată, stabilind valorile medii ale parametrilor necunoscuți mai întîi pe întregul sistem și apoi pe blocuri componente de mărime descrescătoare. Concret, sistemul hidrotermal se testează prin numai cîteva surse, fiind supuse unor încercări succesive în trepte de debit constant pe intervale de timp suficient de mari pentru a se resimți o eventuală influență asupra emergențelor naturale de ape termale de la extremitatea superioară a sistemului sau asupra surselor hidrotermale de la limitele sale laterale. Ca urmare a acestor încercări succesive se obține un șir spre exemplu crescător

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_1 < \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_2 < \ldots < \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_j < \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_{j+1}$$

al valorilor sumei debitelor celor n surse de testare la încercările $1,2,\ldots,j$ în care nu se resimte vreo influență nedorită asupra emergențelor naturale de ape termale de la extremitatea superioară a sistemului sau asupra surselor hidrotermale de la limitele sale laterale și, în final, la încercarea $j+1$ în care se resimte o astfel de influență nedorită (fig. 7.5). Evident, resursele disponibile globale $\mathfrak{Q}_{ex}$ de ape subterane termale au valoarea cuprinsă între

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_j \text{ și } \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_{j+1},$$

adică

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_j \leqslant \mathfrak{Q}_{ex} < \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i\right)_{j+1}$$

dar, pentru asigurarea conservării sistemului, se poate admite că

$$\mathfrak{Q}_{ex} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}_i \right)_j \cdot$$

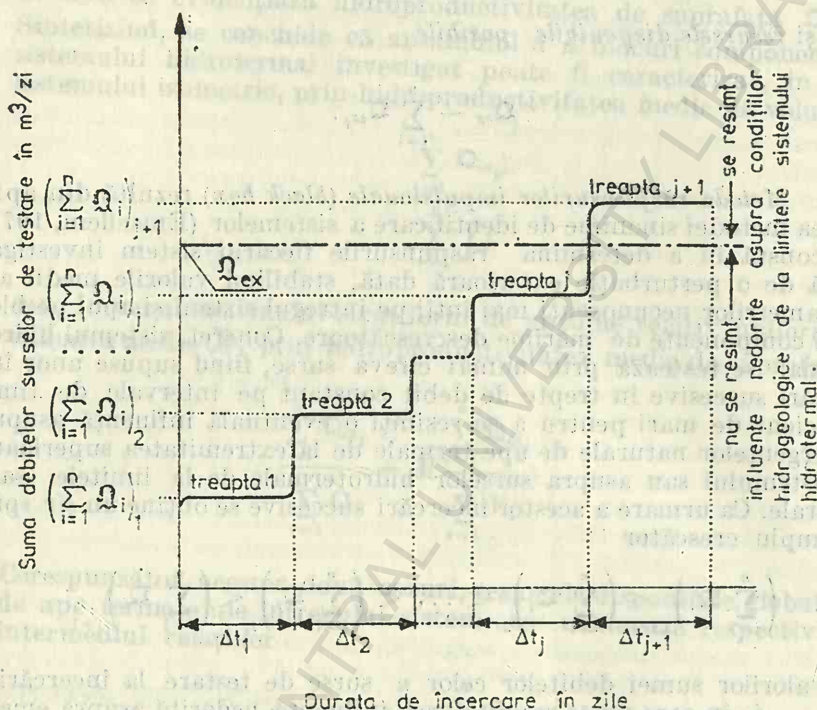


Fig. 7.5. Estimarea resurselor disponibile globale ale unui sistem hidrotermal prin metoda răspunsurilor impulsionale (black box)

Antrenarea în exploatare a acestor resurse se realizează prin distribuirea lor optimă pe surse (puțuri și izvoare) de exploatare cărora le corespund blocuri componente ale sistemului hidrotermal.

Prin intermediul metodelor hidrogeologice clasice, evaluarea resurselor hidrotermale disponibile se bazează pe datele obținute în cîte o singură variantă de exploatare impusă printr-o amplasare a surselor hidrotermale numai după considerente imediate și locale de ordin hidrogeologic și economic sau eventual balnear precum și printr-o distribuție a debitelor pe aceste surse numai după posibili-

tățile tehnice de extragere și valorificare a apelor termale, fără a se cunoaște comportarea sistemelor hidrotermale în alte variante de exploatare și deci nici varianta optimă pentru exploatarea de durată a fiecărui sistem.

Condițiile optime pentru exploatarea de durată a unui sistem hidrotermal pot fi determinate pe baza unui *program operațional de prelucrare și interpretare a datelor hidrogeologice* (fig. 7.6) prin parcurgerea următoarelor etape :

— determinarea parametrilor hidrogeologici caracteristici și a condițiilor inițiale și la limite ale sistemului ;

— modelarea și prevederea evoluției sistemului într-o variantă dată de exploatare ;

— simularea evoluției sistemului în diferite variante de exploatare (diferite distribuții ale surselor de exploatare și ale debitelor pe aceste surse) ;

— alegerea variantei optime de exploatare pentru care se evaluează resursele hidrotermale disponibile ale sistemului. Un astfel de program operațional de prelucrare și interpretare a datelor hidrogeologice este necesar nu numai pentru identificarea sistemelor hidrotermale și pentru evaluarea resurselor lor disponibile, dar și pentru creșterea eficienței lucrărilor de cercetare hidrogeologică și pentru proiectarea exploatării acestor sisteme în funcție de posibilitățile de regenerare naturală (prin condițiile de zăcămînt) și artificială (prin reinjectarea apei după folosire) a acestor resurse.

În funcție de gradul de cunoaștere a sistemelor hidrotermale, resursele lor disponibile pot fi evaluate ca sigure, evasisigure, probabile, posibile etc. după o scară corespunzătoare *gradului de încredere* ε a cărui diferențială se poate exprima sub forma

$$d\varepsilon = -(2^n \ln 2)\,\varepsilon,$$

unde exponentul n are valori cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$. Integrînd de la $-\infty$ la n și respectiv de la $\lim\limits_{n\to-\infty} \varepsilon(n) = 1$ la ε, se obține o formulă convenabilă pentru reprezentarea *spectrului de încredere*

$$\varepsilon_n = e^{-2^n}$$

în care n se definește, spre exemplu, prin funcția $n = \mp 2^i$. Pentru $i = -\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ +\infty$ și deci pentru

$$n = -\infty, -4, -2, -1, 0, +1, +2, +4, +\infty,$$

Stocarea valorilor iniţiale şi ulterioare ale sarcinii piezometrice sau presiunii şi temperaturii apelor în sursele existente pe domeniul sistemului hidrotermal precum şi a datelor privind condiţiile la limitele sistemului şi evoluţia în timp a acestor condiţii

Întocmirea hărţilor cu hidroizopieze şi cu hidroizotemperaturi la stările iniţiale şi ulterioare

Discretizarea timpului şi spaţiului, preluarea valorilor de calcul şi pregătirea modelului

Aplicarea metodei celor mai mici pătrate pentru evaluarea parametrilor caracteristici

Alegerea metodei de prevedere a evoluţiei sistemului hidrotermal prin integrarea numerică a ecuaţiilor de difuzivitate hidraulică şi termică în condiţiile unei variante date de exploatare

Metoda diferenţelor finite

Metoda elementului finit

Interpretarea şi prezentarea rezultatelor

Decizia asupra optimităţii discretizării timpului şi spaţiului precum şi a calării modelului, avînd în vedere atît asigurarea continuităţii cît şi convergenţa şi stabilitatea soluţiilor

Simularea evoluţiei sistemului hidrotermal în diferite variante de exploatare cu sau fără injectarea apei în subteran

Alegerea variantei optime de exploatare şi regenerare a sistemului hidrotermal

Întocmirea hărţilor de prognoză cu hidroizopieze şi cu hidroizotemperaturi

Precizarea variantei optime de exploatare şi regenerare a sistemului hidrotermal pe baza confruntării rezultatelor simulării cu datele obţinute prin urmărirea evoluţiei sistemului hidrotermal în cursul exploatării

Elaborarea reprezentărilor de sinteză pe sistem şi stabilirea domeniului său de influenţă în cadrul hidrotermostructurii

Fig. 7.6. Schema logică a programului operaţional de prelucrare şi interpretare a datelor hidrogeologice pentru determinarea condiţiilor optime de exploatare a unui sistem hidrotermal

se reţin ca *trepte principale de încredere*

$$\varepsilon_{-\infty} = 1,$$

$$\varepsilon_{-4} = 0{,}9394134,$$

$$\varepsilon_{-2} = 0{,}7788012,$$

$$\varepsilon_{-1} = 0{,}6065310,$$

$$\varepsilon_{0} = 0{,}3678796,$$

$$\varepsilon_{+1} = 0{,}1353354,$$

$$\varepsilon_{+2} = 0{,}0183156,$$

$$\varepsilon_{+4} = 0{,}0000001,$$

$$\varepsilon_{+\infty} = 0.$$

* * *

Prin lucrările de investigare geologică şi hidrogeologică prevăzute în *programul naţional pentru cercetarea şi valorificarea de noi surse de energie*, au fost identificate sisteme hidrotermale cu importante resurse utilizabile în scopuri energetice (vezi tabelul 7.3) pentru înlocuirea sau, cel puţin, pentru economisirea combustibililor clasici.

Pe baza informaţiilor de care se dispune pînă în prezent, se conchide că principalele sisteme hidrotermale din ţara noastră se găsesc în subsolul Cîmpiei de Vest, fiind localizate în formaţiunile geologice din cadrul Depresiunii Panonice. Sistemele hidrotermale sînt reprezentate atît prin sistemele fisurale din soclul acestei depresiuni, în formaţiuni cristaline, triasice şi cretacice, cît şi prin sistemele intergranulare (strate mai mult sau mai puţin continue, cu intercalaţii argiloase şi cu variaţii litologice laterale) din umplutura sa sedimentară, în formaţiuni miocene şi panoniene inferioare dar mai ales în formaţiuni panoniene superioare (ponţiene). Majoritatea sistemelor hidrotermale din soclul Depresiunii Panonice şi o parte din cele din umplutura sa sedimentară sînt deschise, iar restul sînt cvasiînchise din punct de vedere hidrodinamic.

În conformitate cu prevederile pentru cercetarea şi valorificarea noilor surse de energie şi pentru tehnologiile energetice cuprinse în *programele-directivă* atît *de cercetare ştiinţifică, dezvoltare tehnologică şi introducere a progresului tehnic*, cît *şi de cercetare şi dezvoltare în domeniul energiei pe perioada 1981—1990 şi direcţiile principale pînă în anul 2 000*, din analiza stadiului actual de cunoaştere, de antrenare în exploatare şi de valorificare a resurselor hidrotermale rezultă

Tabelul 7.3.

Resursele hidrotermale disponibile pentru scopuri energetice evaluate la emergență prin scăderea temperaturii pînă la 30 °C pe domeniile unor sisteme hidrotermale de pe teritoriul României

Domeniul sistemului hidrotermal	Aria domeniului (km^2)	Hidroproductivitatea $\left(\frac{m^3/zi}{km^2}\right)$	Temperatura medie la emergență (°C)	Resursele hidrotermale disponibile (MW)	Gradul de încredere
1	2	3	4	5	6
Depresiunea Panonică					
Banatul de Vest	1400	350	80	1186,861	
				134,381	0,6065
				934,683	0,3679
				117,797	0,1353
Biharia-Săcueni-Marghita	1140	270	70	596,434	
				63,966	0,6065
				409,042	0,3679
				123,426	0,1353
Mureș-Crișu Alb	1570	265	54	483,716	
				45,785	0,6065
				234,515	0,3679
				203,416	0,1353
Valea lui Mihai—Tășnad—Carei	1110	250	65	470,505	
				3,113	0,6065
				197,382	0,3679
				270,010	0,1353
Ciumeghiu—Salonta	500	210	84	274,673	
				6,103	0,6065
				268,570	0,1353
Banatul de Est	2770	130	40	174,444	
				174,444	0,1353
Oradea—Borș	300	200	80	145,330	
				6,896	0,7788
				41,077	0,6065
				97,357	0,1353

Satu Mare—Carei	1030	119	54	142,505	
				4,017	0,7788
				36,349	0,6065
				0,482	0,3679
				101,657	0,1353
Cefa—Tinca—Mădăraş	120	106	46	9,859	
				0,938	0,6065
				0,375	0,3679
				8,546	0,1353
Nuşfalău—Boghiş	102	135	40	6,671	
				6,671	0,1353
Palota	10	100	59	1,405	
				0,133	0,6065
				1,272	0,1353
	Platfor ma Moesică				
Craiova—Balş	660	45	85	79,132	
				79,132	0,1353
Slatina—Drăgăşani	500	60	70	58,132	
				58,132	0,1353
Videle	1500	20	70	58,132	
				58,132	0,1353
Găeşti—Titu	600	20	80	29,066	
				29,066	0,1353
Bucureşti	850	20	50	16,471	
				16,471	0,1353
Roşiorii de Vede	600	15	60	13,080	
				13,080	0,0183
Însurăţei	300	50	45	10,900	
				10,900	0,1353
Mihăileşti—Vidra	480	20	50	9,301	
				9,301	0,0183
Filiaşi	170	35	60	8,647	
				8,647	0,1353
Scorniceşti	470	10	65	7,969	
				7,969	0,1353
Urziceni—Pogoanele	260	40	40	5,038	
				5,038	0,1353

(continuare tabel 7.3)

1	2	3	4	5	6
Slobozia – Amara	135	40	45	3,924	
				3,924	0,1353
Cireșu	125	20	40	1,211	
				1,211	0,0183
Făurei	70	30	40	1,017	
				1,017	0,0183
Hîrșova	6	100	40	0,291	
				0,291	0,1353
Gîrla Mare-Gruia	60	10	40	0,291	
				0,291	0,1353
	Depresiunea Getică				
Hurezani	185	35	80	15,684	
				15,684	0,1353
Tîrgoviște	390	20	70	15,114	
				15,114	0,1353
Tîrgu Jiu-Bengești	125	35	80	10,597	
				10,597	0,1353
Călimănești – Căciulata	10	200	50	1,938	
				1,938	0,1353
	Carpații Orientali				
Miercurea Ciuc	8	324	45	1,883	
				1,883	0,1353
Pîrîul Cormoș	16	108	50	1,674	
				1,674	0,0183

Vlăhiţa	6	360	45	1,570	
				1,570	0,1353
Praid	5	173	60	1,257	
				1,257	0,1353
Tuşnad	5	162	60	1,177	
				1,177	0,1353
Baia Mare—Seini	20	65	45	0,945	
				0,945	0,1353
Baia Sprie—Cavnic	10	86	50	0,833	
				0,833	0,1353
Topliţa—Lunca Bradului	6	144	45	0,628	
				0,628	0,1353
Depresiunea Oaşului	50	17	45	0,618	
				0,618	0,1353
Munţii Apuseni					
Depresiunea Zarandului	70	54	40	1,831	
				1,831	0,1353
Depresiunea Streiului	50	60	40	1,453	
				1,453	0,1353
Carpaţii Meridionali					
Grabenul Cernei	15	200	45	2,180	
				2,180	0,1353

obiectivele imediate ale cercetării pentru cunoașterea și valorificarea acestor resurse precum și măsurile pentru creșterea eficienței economice în valorificarea lor care sînt prezentate respectiv în tabelele 7.4

Tabelul 7.4.

Obiective imediate ale cercetării pentru cunoașterea și valorificarea resurselor hidrotermale

Premise	Obiective
Existența unei mari cantități de informații dispersate și insuficient valorificate, obținute prin cercetarea, urmărirea evoluției și exploatarea sistemelor hidrotermale	Realizarea unei baze centralizate de date pentru apele subterane termale, prin stocarea tuturor datelor relative la surse (foraje și emergențe naturale), la condițiile inițiale și ulterioare ale sistemelor hidrotermale, la exploatarea, valorificarea și regenerarea resurselor disponibile precum și realizarea unor programe de prelucrare la calculator a acestor date atît pentru întocmirea unor situații operative privind temperatura, debitul, cantitatea de căldură, mineralizația, domeniul de utilizare ș.a. pe surse, pe sisteme hidrotermale, pe județe, pe beneficiari etc., cît și pentru prelucrarea și interpretarea lor în scopul întocmirii hărților cu hidroizopieze, cu hidroizotemperaturi și cu hidroizomineralizații, al determinării parametrilor caracteristici, al prevederii evoluției sistemelor hidrotermale și al optimizării exploatării și regenerării resurselor hidrotermale
Aplicarea unor metode aproximative sau insuficient aprofundate din punct de vedere fizic pentru determinarea parametrilor sistemelor hidrotermale (în special a coeficienților de conductibilitate și difuzivitate hidraulică, termică și dispersională), a evoluției în ansamblu a cîmpurilor hidrodinamic, de temperatură și de concentrație, precum și a sistemelor și regimurilor optime de exploatare a apelor subterane termale	Generalizarea metodelor fundamentale din punct de vedere hidrogeologic, hidrotermodinanic și hidrochimic precum și realizarea unor programe adecvate pentru aplicarea lor în prelucrarea operativă a datelor primare prin intermediul calculatoarelor care să permită atît determinarea parametrilor și evoluției sistemelor hidrotermale, cît și optimizarea exploatării resurselor lor disponibile, mai întîi pe sisteme hidrotermale și apoi pe hidrotermostructuri
Dificultatea săpării, investigării, echipării și funcționării sondelor în condiții de temperatură ridicată	Dotarea tehnică corespunzătoare pentru forarea, investigarea, echiparea și funcționarea optimă a sondelor de cercetare și de exploatare, precum și aplicarea unor tehnologii corespunzătoare particularităților sistemelor hidrotermale

(continuare tabel 7.4)

Premise	Obiective
Lipsa unei metodologii unitare specifice investigării complexe a sistemelor hidrotermale	Stabilirea, pe baza experienței acumulate, a unei metodologii unitare de investigare complexă a sistemelor hidrotermale pentru obținerea tuturor datelor primare necesare evaluării corecte a resurselor hidrotermale disponibile
Predominanța resurselor de ape subterane cu temperatură de pînă la 70°C față de cele identificate cu temperatură de peste 70°C	Utilizarea eficientă în scopuri energetice a resurselor hidrotermale disponibile cu temperatură de pînă la 70°C, independent sau asociat celor cu temperatură mai mare
Identificarea la adîncimi accesibile a unor ape subterane și roci cu temperatură foarte mare	Transformarea căldurii apelor subterane și rocilor cu temperatură foarte mare în energie electrică
Existența unui decalaj între darea în folosință a surselor hidrotermale și realizarea gospodăririi raționale a resurselor hidrotermale conform unei tehnologii adecvate de valorificare	Corelarea proiectelor de exploatare cu cele de valorificare a apelor subterane termale în funcție atît de repartiția teritorială, accesibilitatea, mărimea și calitatea resurselor hidrotermale cît și de amplasarea, tipul și cerințele obiectivelor beneficiare
Irosirea sau folosirea cu eficiență redusă a unei mari părți din resursele hidrotermale antrenate în exploatare prin sondele existente	Stabilirea, pe criterii hidrogeologice, energetice și economice, a destinației resurselor hidrotermale disponibile și a unor sisteme eficiente de exploatare, utilizare și reintroducere în subteran după folosire a apelor termale, pentru a se asigura gospodărirea rațională și regenerarea acestor resurse și pentru a se evita poluarea apelor de suprafață
Diminuarea energiei de zăcămînt la exploatarea prin grupuri de sonde	Experimentarea regenerării energiei hidrogeotermice prin reintroducerea apelor în sistemele hidrotermale după utilizare, pentru menținerea unui bilanț activ între resurse și consum
Întîrzierea folosirii resurselor de ape termale cu mineralizație ridicată, datorită depunerii de săruri pe coloanele și conductele de exploatare	Prevenirea și combaterea depunerii de săruri din soluție pe coloanele și conductele de exploatare a apelor termale

şi 7.5. Avînd în vedere posibilităţile actuale de creştere a ponderii de participare a resurselor hidrotermale în balanţa energetică a ţării

Tabelul 7.5.

Măsuri pentru creşterea eficienţei economice în valorificarea resurselor hidrotermale

Scopul	Măsurile pentru valorificarea resurselor hidrotermale	Stadiul actual şi perspectivele de îndeplinire a măsurilor
1	2	3
Valorificare superioară	Utilizarea de ape subterane cu temperatură ridicată în termoficare, pentru încălzirea locuinţelor şi ca ape menajere în scopul economisirii combustibililor clasici	Alimentarea cu apă caldă şi încălzirea unor apartamente din Oradea; mari perspective în zonele cu productivitate mare de ape subterane cu temperatură de peste 70°C, unde este necesar să fie complet determinate resursele disponibile şi să fie definitivate sistemele de exploatare-distribuţie-gospodărire a apelor termale
	Extinderea utilizării apelor termale pentru încălzirea serelor, unor unităţi industriale, complexe zootehnice şi a altor obiective, în unele procese industriale, piscicultură etc.	Încălzirea unor sere de legume şi flori (Săcueni, Salonta, Oradea), a unor complexe de creşterea porcilor (Moftinu Mic) şi a complexului balneoterapeutic de la Satu Mare; alimentarea cu apă caldă a unor topitorii de in şi cînepă (Palota, Nădlac, Biled), a unor crescătorii de peşte (Cefa, Băile Felix—1 Mai) ş.a.; mari perspective în zonele cu resurse importante de ape subterane cu temperatură de peste 40°C
Valorificare completă	Folosirea integrală a resurselor antrenate în exploatare, menţinînd în conservare restul resurselor disponibile	Antrenarea în exploatare a resurselor disponibile de ape termale este incompletă, iar gradul de utilizare a resurselor disponibile antrenate în exploatare este încă nesatisfăcător; pentru viitor trebuie asigurată gospodărirea unitară şi coordonată a resurselor hidrotermale antrenate în exploatare
	Extinderea, în funcţie de disponibilităţi, a folosinţelor în scopuri locale	Folosirea de ape termale debitate de sonde izolate pentru alimentarea unor bazine de tratament şi ştranduri comunale, unităţi agricole şi zootehnice etc. (în judeţele Satu Mare, Bihor şi Timiş); în perspectivă, extinderea acestor folosinţe în cadrul sistemelor de gospodărire raţională a resurselor disponibile

1	2	3
Valorificare complexă	Reutilizarea pentru agrement şi eventual pentru tratament a apelor folosite în prealabil pentru încălzire (utilizare în trepte)	Încercările de reutilizare a apelor folosite în prealabil pentru încălzire la Oradea şi sezonier la complexul balneoterapeutic de la Satu Mare trebuie continuate şi intensificate pentru creşterea eficienţei economice în valorificarea resurselor hidrotermale
	Extragerea de componenţi utili (bor, carbonat de sodiu etc.) din apele termale mineralizate	Experimentarea, în fază de laborator, a procedeului de extragere din apele termale mineralizate a borului şi carbonatului de sodiu, prin care s-a obţinut 1,5 g de bor cu puritate de 86 % dintr-un metru cub de apă termală mineralizată, fiind posibilă obţinerea a 1200 tone/an de carbonat de sodiu sau 700 tone/an de sodă calcinată şi a 1 000 tone/an de acid boric; în perspectivă, experimentarea extragerii, în fază pilot, a borului şi carbonatului de sodiu, precum şi punerea la punct a procedeelor de extragere din apele termale mineralizate a altor elemente (litiu, magneziu etc.)

noastre, se conchide că trebuie rezolvate operativ următoarele probleme :

— injecţia în subteran a apelor termale după folosire pentru a se evita poluarea apelor de suprafaţă şi pentru regenerarea resurselor hidrotermale disponibile ;

— tratarea eficientă a apelor termale mineralizate pentru îndepărtarea componenţilor nocivi (ca de ex. fenoli) şi pentru prevenirea şi combaterea depunerii de săruri şi coroziunii pe conducte ;

— extragerea din apele termale mineralizate a unor componenţi utili (ca de ex. bor, carbonat de sodiu, iod, brom etc.) pentru rentabilizarea introducerii în circuitul economic a resurselor hidrotermale disponibile ;

— asigurarea eficienţei utilizării raţionale a căldurii şi eventual a componenţilor utili din apele termale, în condiţiile consumului de energie pentru extragerea, transportul, tratarea şi reintroducerea lor în subteran după folosire ;

— precizarea condiţiilor de gospodărire şi valorificare eficientă a resurselor hidrotermale identificate în funcţie de caracteristicile lor şi de cerinţele consumatorilor potenţiali ;

— evaluarea parametrilor hidrogeologici și prevederea evoluției sistemelor hidrotermale în cursul exploatării;

— simularea comportării sistemelor hidrotermale în diferite variante de exploatare, pe baza unor programe adecvate de prelucrare și interpretare a datelor hidrogeologice prin intermediul calculatoarelor electronice;

— determinarea variantei optime de exploatare atît din punct de vedere hidrodinamic cît mai ales termodinamic a unor sisteme deschise sau cvasideschise ca cele hidrotermale și nu numai din punct de vedere hidrodinamic a unor sisteme închise ca structurile petrolifere sau gazeifere;

— urgentarea introducerii în circuitul energetic a disponibilităților nevalorificate de ape termale, prin aprofundarea cunoașterii condițiilor de zăcămînt ale sistemelor hidrotermale și de regenerare a resurselor hidrotermale precum și prin intensificarea și extinderea posibilităților de valorificare a acestora.

7.5. Aplicații

7.5.1. Un strat acvifer orizontal sub presiune omogen și izotrop cu conductibilitatea hidraulică de 12 m/zi, conductibilitatea termică de 1,13 W/m · °K și grosimea uniformă de 10 m este alimentat cu apă mai caldă decît a sa printr-o falie plană verticală. În aureola hidrotermală asociată acestei falii, la distanțe de 20 m și 80 m în stratul acvifer se înregistrează respectiv creșteri ale sarcinii piezometrice de 0,50 m și 0,49 m precum și creșteri ale temperaturii de 2,00°K și 1,64°K. În condițiile hidrotermoconvecției staționare conservative să se evalueze debitul unitar al curentului acvifer, densitatea fluxului de termoconvecție laterală și creșterile de sarcină piezometrică și de temperatură la distanța de 50 m față de falie, știind că pentru apa stratului acvifer $\rho c_p = 4{,}2 \cdot 10^6$ J/m³ · °K.

Rezolvare. Se aplică mai întîi formulele (7.41) și (7.42) în care $\mathfrak{K}=12$ m/zi, $\tilde{\varkappa}=1{,}13$ W/m. °K, $M=10$ m, $\rho c_p=4{,}2 \cdot 10^6$ J/m³·

$\cdot °K$, $x_1 = 20$ m, $x_2 = 80$ m, $s_1 = 0{,}50$ m, $s_2 = 0{,}49$ m, $\theta_1 = 2{,}00°K$ și $\theta_2 = 1{,}64°K$, de unde rezultă că

$$q = \frac{12 \cdot 10 \cdot (0{,}50 - 0{,}49)}{80 - 20} = 0{,}02 \frac{m^2}{zi} = 0{,}23148 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

și respectiv

$$\tilde{q}_0 = \frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6} (2{,}00 - 1{,}64)}{10 \left(e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 20} - e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 80}\right)} =$$

$$= 0{,}196\,73 \frac{W}{m^2} \cdot$$

Apoi, pentru $x = 50$ m, se aplică formulele (7.38), (7.39) și (7.40) din care se obține respectiv :

$$\tilde{q} = 0{,}19673 \cdot e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 50} = 0{,}00266 \frac{W}{m^2},$$

$$s = 0{,}50 - \frac{0{,}02}{12 \cdot 10} (50 - 20) = 0{,}49 + \frac{0{,}02}{12 \cdot 10} (80 - 50) = 0{,}495 \text{ m}$$

și

$$\theta = 2{,}00 - \frac{10 . 0{,}19673}{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}} \left(e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 20} - e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 50}\right) =$$

$$= 1{,}64 + \frac{10 \cdot 0{,}19673}{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}} \left(e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 50} - e^{-\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}23148 \cdot 10^{-6}}{1{,}13 \cdot 10} 80}\right) =$$

$$= 1{,}66533°K.$$

7.5.2. Într-un strat acvifer orizontal sub presiune omogen și izotrop cu conductibilitatea termică de 1,2 W/m · °K și grosimea uniformă de 20 m se injectează cu debitul de 86,4 m^3/zi apă mai caldă cu 10,00°K decît a sa printr-un puț cu raza de 0,15 m considerat perfect atît după gradul de deschidere cît și după modul de deschidere în care se menține o creștere staționară a sarcinii piezometrice de 0,70 m.

Într-un piezometru situat la distanța de 15 m față de puțul de injecție sînt măsurate creșteri staționare ale sarcinii piezometrice și temperaturii de 0,38 m și respectiv de 0,10°K. Presupunînd că hidrotermoconvecția este staționară conservativă și cunoscînd că pentru apa stratului acvifer $\rho c_p = 4{,}22 \cdot 10^6$ J/m^3 · °K, să se calculeze conductibilitatea hidraulică a stratului acvifer și fluxul de termoconvecție transmis acestuia prin peretele puțului.

Rezolvare. Prin intermediul formulelor (7.51) și (7.52) preluate sub formele

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{Q}}{2\pi M(\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{s})} \ln \frac{r}{r_0}$$

și

$$Q_0 = \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}(\theta_0 - \theta)}{1 - \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}M}}}$$

cu $\mathfrak{Q} = 86{,}4$ m^3/zi $= 0{,}001$ m^3/s, $M = 20$ m, $\rho c_p = 4{,}22 \cdot 10^6$ J/m^3·°K, $\tilde{\varkappa} = 1{,}2$ W/m·°K, $r_0 = 0{,}15$ m, $r = 15$ m, $\mathfrak{s}_0 = 0{,}70$ m, $\mathfrak{s} = 0{,}38$ m, $\theta_0 = 10{,}00$ °K și $\theta = 0{,}10$ °K, rezultă că

$$\mathfrak{K} = \frac{86{,}4}{2\pi \cdot 20\,(0{,}70 - 0{,}38)} \ln \frac{15}{0{,}15} = 9{,}89463 \ \frac{\text{m}}{\text{zi}}$$

și respectiv

$$Q_0 = \frac{4{,}22 \cdot 10^6 \cdot 0{,}001 \cdot (10{,}00 - 0{,}10)}{1 - \left(\dfrac{0{,}15}{15}\right)^{\frac{4{,}22 \cdot 10^6 \cdot 0{,}001}{2\pi \cdot 1{,}2 \cdot 20}}} = 41778 \text{ W}.$$

7.5.3. Într-un acvifer omogen și izotrop sub presiune dezvoltat izometric cu conductibilitatea termică de 1,1 W/m · °K și mărginit la partea superioară printr-un acoperiș orizontal se injectează cu debitul de 150 m^3/zi $= 1736{,}11 \cdot 10^{-6}$ m^3/s apă mai rece cu 20°K decît a sa printr-un puț cu talpa de rază 0,1 m la nivelul acope-

rişului presupus impermeabil. În condiţiile hidrotermoconvecţiei staţionare conservative radial-sferice, să se evalueze fluxul de termoconvecţie prin talpa puţului, ştiind că pentru apa acviferului $\rho c_p = 4{,}21 \cdot 10^6\ \mathrm{J/m^3 \cdot {}^\circ K}$.

Rezolvare. Considerînd intervalul de la $r = r_0 = 0{,}1$ m unde $\theta = \theta_0 = -20^\circ$K la $r = \infty$ unde $\theta = 0$ şi aplicînd formula (7.65) sau (7.67) din care se deduce că

$$Q_0 = \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}(\theta_0 - 0)}{e^{\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0}\right)} - e^{\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\infty}\right)}} = \frac{\rho c_p \mathfrak{Q}\,\theta_0}{1 - e^{\frac{\rho c_p \mathfrak{Q}}{2\pi\tilde{\varkappa} r_0}}},$$

rezultă :

$$Q_0 = \frac{4{,}21 \cdot 10^6 \cdot 1736{,}11 \cdot 10^{-6}\,(-20)}{1 - e^{\frac{4{,}21 \cdot 10^6 \cdot 1736{,}11 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}1}}} \approx 271{,}2 \cdot 10^{-4590}\ \mathrm{W}.$$

7.5.4. Un strat acvifer orizontal sub presiune omogen şi izotrop cu conductibilitatea hidraulică de 15 m/zi, conductibilitatea termică de 1,15 W/m · °K şi grosimea uniformă de 5 m se alimentează cu apă mai rece decît a sa printr-o frontieră plană verticală, fiind închis etanş prin culcuşul şi acoperişul său şi reîncălzit vertical corespunzător unei productivităţi medii de căldură proporţionale cu scăderea de temperatură. La distanţele de 50 m şi 100 m faţă de frontiera de alimentare, în stratul acvifer se înregistrează respectiv valori ale creşterii sarcinii piezometrice de 1,0 m şi 0,5 m, iar ale scăderii temperaturii de 9,9°K şi 9,8°K. Considerînd că hidrotermoconvecţia este staţionară şi că $\rho c_p = 4{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{J/m^3 \cdot {}^\circ K}$, să se calculeze factorul de reîncălzire verticală (de neconservativitate) şi fluxul de termoconvecţie laterală prin frontiera de alimentare.

Rezolvare. Prin intermediul formulei (7.41) în care $\mathfrak{K} = 15$ m/zi, $M = 5$ m, $x_1 = 50$ m, $x_2 = 100$ m, $\mathfrak{s}_1 = 1{,}0$ m şi $\mathfrak{s}_2 = 0{,}5$ m, se găseşte mai întîi că debitul unitar al curentului acvifer are valoarea

$$q = \frac{15 \cdot 5\,(1{,}0 - 0{,}5)}{100 - 50} = 0{,}75\ \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{zi}} = 8{,}68 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Aplicînd apoi formula (7.71) pentru $x = x_1$ unde $\theta = \theta_1$ şi pentru $x = x_2$ unde $\theta = \theta_2$ se obţin două relaţii din care, prin împărţire, rezultă:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{e^{\left[-\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x_1}}{e^{\left[-\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right] x_2}} =$$

$$= e^{\left[-\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}}\right](x_2 - x_1)}$$

sau

$$\tilde{B} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho c_p q \ln(\theta_1/\theta_2)}{\tilde{\varkappa} M(x_2 - x_1)} + \left[\frac{\ln(\theta_1/\theta_2)}{x_2 - x_1}\right]^2}}.$$

Întrucît $\rho c_p = 4{,}2 \cdot 10^6$ J/m$^3 \cdot$°K, $q = 8{,}68 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, $\tilde{\varkappa} = 1{,}15$W/ /m · °K, $M = 5$ m, $x_1 = 50$ m, $x_2 = 100$ m, $\theta_1 = -9{,}9$ °K şi $\theta_2 = -9{,}8$ °K, urmează că

$$\tilde{B} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 8{,}68 \cdot 10^{-6} \ln[(-9{,}9)/(-9{,}8)]}{1{,}15 \cdot 5(100 - 50)} + \left\{\frac{\ln[(-9{,}9)/(-9{,}8)]}{100 - 50}\right\}^2}} \approx$$

$$\approx 27{,}87 \text{ m}.$$

În sfîrşit, utilizînd formula (7.72) în care

$$\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} = \frac{4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 8{,}68 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1{,}15 \cdot 5} = 3{,}1700\,868 \frac{1}{m}$$

şi

$$-\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M} + \sqrt{\left(\frac{\rho c_p q}{2\tilde{\varkappa} M}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{B}^2}} =$$

$$= -3{,}1700868 + \sqrt{(3{,}1700868)^2 + \frac{1}{(27{,}87)^2}} = 0{,}0002029 \frac{1}{\text{m}},$$

se obţine :

$$\tilde{q}_0 = -\frac{1{,}15 \cdot 0{,}0002029 \cdot [(-9{,}9) - (-9{,}8)]}{e^{-0{,}0002029 \cdot 50} - e^{-0{,}0002029 \cdot 100}} = 0{,}002335 \ \frac{W}{m^2}.$$

7.5.5. Într-un acvifer orizontal sub presiune omogen şi izotrop cu conductibilitatea termică de 1,188 W/m·°K şi grosime uniformă de 94 m se injectează cu debitul de 0,003 m^3/s apă mai rece decît a sa printr-un puţ cu raza de 0,10 m considerat perfect din punct de vedere hidrodinamic. În condiţiile hidrotermoconvecţiei staţionare în care acviferul este închis etanş prin culcuşul şi acoperişul său şi reîncălzit vertical corespunzător unei productivităţi medii de căldură proporţionale cu scăderea de temperatură, să se evalueze factorul de reîncălzire (de neconservativitate) şi fluxul de termoconvecţie prin peretele puţului de injecţie, ştiind că pentru apa acviferului $\rho c_p = 4{,}21 \cdot 10^6$ J/m^3 · °K şi că în două piezometre situate la distanţe de 56 m şi 160 m faţă de puţ se înregistrează respectiv valori ale scăderii de temperatură de 0,15°K şi 0,10°K.

Rezolvare. Se recurge la soluţia (7.78) şi la variabila $r = \widetilde{B} \cdot (r/\widetilde{B})$ care se logaritmează sub formele

$$\lg(-\theta) = \lg\left[\frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa} M(r_0/\widetilde{B})^{\nu+1}}\right] + \lg\left[\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)\right]$$

şi

$$\lg r = \lg \widetilde{B} + \lg\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right),$$

unde, potrivit cu (7.75), ordinul ν are valoarea

$$\nu = \frac{4{,}21 \cdot 10^6 \cdot 0{,}003}{4\pi \cdot 1{,}188 \cdot 94} = 9.$$

Astfel se evidenţiază, pentru $Q_0/[2\pi\tilde{\varkappa} M(r_0/\widetilde{B})^{\nu+1}] = const.$ şi $\widetilde{B} = const.$, translaţia fără rotaţie a *curbei reprezentative a scăderii de temperatură* corespunzătoare funcţiei

$$\lg(-\theta) = f_1(\lg r)$$

față de *curba teoretică* corespunzătoare funcției

$$\lg\left[\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)^9 K_9\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)\right]=f_0\left[\lg\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)\right]$$

ale cărei valori uzuale pot fi calculate imediat pe baza tabelului 7.2, așa cum se prezintă în tabelul 7.6. Prin urmare, dacă se trasează curba teoretică într-un sistem de coordonate în care sînt înscrise pe

Tabelul 7.6.

Valorile uzuale calculate pentru funcția $(r/\widetilde{B})^9 K_9(r/\widetilde{B})$ și pentru logaritmul său zecimal

$\frac{r}{\widetilde{B}}$	$\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)^9 K_9\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)$	$\lg\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)$	$\lg\left[\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)^9 K_9\left(\frac{r}{\widetilde{B}}\right)\right]$
0,2	$10,30913\cdot 10^6$	−0,69897	7,01322
0,4	$10,27029\cdot 10^6$	−0,39794	7,01158
0,6	$10,20669\cdot 10^6$	−0,22185	7,00889
0,8	$10,11775\cdot 10^6$	−0,09691	7,00508
1,0	$10,00500\cdot 10^6$	0,00000	7,00022
1,2	$9,86858\cdot 10^6$	0,07918	6,99425
1,4	$9,71109\cdot 10^6$	0,14613	6,98727
1,6	$9,53275\cdot 10^6$	0,20412	6,97922
1,8	$9,33458\cdot 10^6$	0,25527	6,97009
2,0	$9,11870\cdot 10^6$	0,30103	6,95993
2,2	$8,88693\cdot 10^6$	0,34242	6,94875
2,4	$8,64081\cdot 10^6$	0,38021	6,93655
2,6	$8,38152\cdot 10^6$	0,41497	6,92332
2,8	$8,11133\cdot 10^6$	0,44716	6,90909
3,0	$7,83286\cdot 10^6$	0,47712	6,89392
3,2	$7,54670\cdot 10^6$	0,50515	6,87776
3,4	$7,25447\cdot 10^6$	0,53148	6,86061
3,6	$6,95879\cdot 10^6$	0,55630	6,84253
3,8	$6,66101\cdot 10^6$	0,57978	6,82354
4,0	$6,36249\cdot 10^6$	0,60206	6,80363
4,2	$6,06428\cdot 10^6$	0,62325	6,78278
4,4	$5,75638\cdot 10^6$	0,64345	6,76015
4,6	$5,47642\cdot 10^6$	0,66276	6,73850
4,8	$5,18859\cdot 10^6$	0,68124	6,71505
5,0	$4,90507\cdot 10^6$	0,69897	6,69065

abscisă valorile $\lg(r/\widetilde{B})$ și pe ordonată valorile $\lg[(r/\widetilde{B})^9 K_9(r/\widetilde{B})]$ din tabelul 7.6 (fig. 7.7, a), iar punctele curbei reprezentative a scăderii de temperatură într-un același sistem de coordonate în care sînt înscrise pe abscisă valorile $\lg r$ și pe ordonată valorile $\lg(-\theta)$

date respectiv prin $\lg r_1 = \lg 56 = 1{,}74819$ și $\lg(-\theta)_1 = \lg 0{,}15 = -0{,}82391$; $\lg r_2 = \lg 160 = 2{,}20412$ și $\lg(-\theta)_2 = -1{,}00000$ (fig. 7.7, b), atunci se pot suprapune și glisa punctele curbei reprezentative a scăderii de temperatură pe curba teoretică, menținînd axele de coordonate paralele, pînă la suprapunerea optimă a acestora.

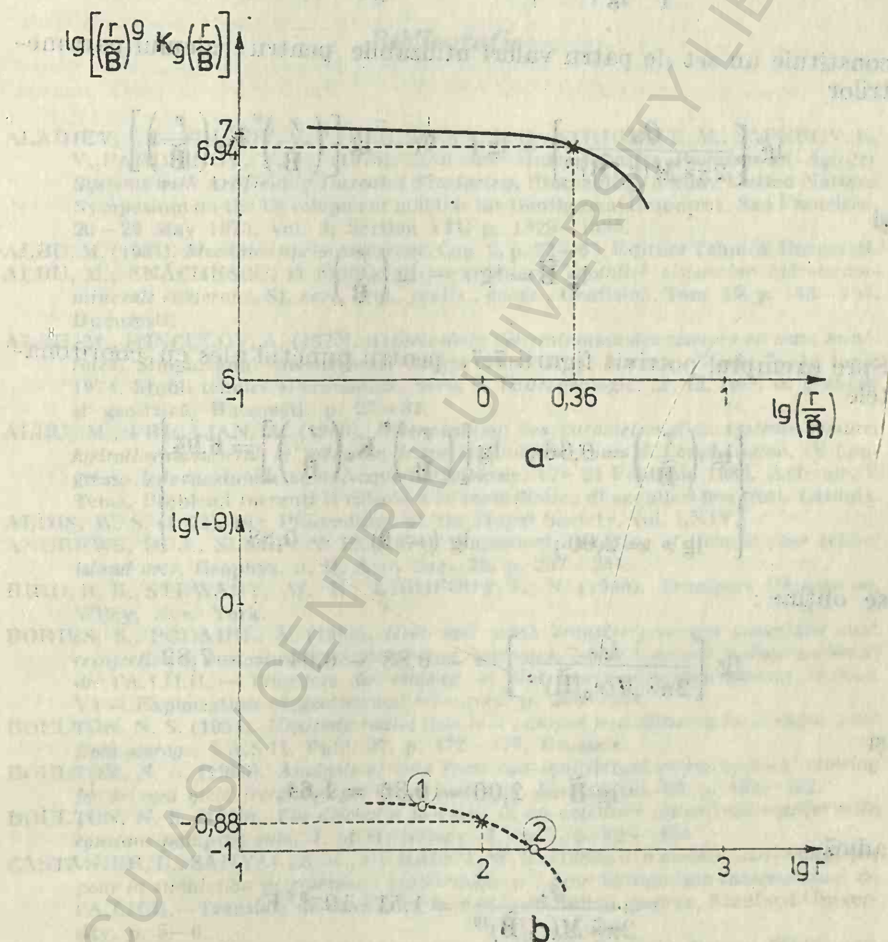


Fig. 7.7. Curba teoretică (*a*) și punctele curbei reprezentative a scăderii de temperatură (*b*) pentru interpretarea datelor din aplicația 7.5.5.

Pentru oricare punct de pe intervalul de suprapunere optimă, coordonatele

$$\begin{Bmatrix} \lg\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right), & \lg\left[\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^9 K_9\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\right] \\ \lg r\quad, & \lg(-\theta) \end{Bmatrix}$$

constituie un set de patru valori utilizabile pentru calculul parametrilor

$$\lg\left[\frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa} M(r_0/\tilde{B})^{10}}\right] = \lg(-\theta) - \lg\left[\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^9 K_9\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\right]$$

și

$$\lg\tilde{B} = \lg r - \lg\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right).$$

Spre exemplu, potrivit figurii 7.7, pentru punctul ales cu coordonatele

$$\begin{Bmatrix} \lg\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right) = 0{,}36; & \lg\left[\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)^9 K_9\left(\frac{r}{\tilde{B}}\right)\right] = 6{,}94 \\ \lg r = 2{,}00; & \lg(-\theta) = -0{,}88 \end{Bmatrix},$$

se obține:

$$\lg\left[\frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa} M(r_0/\tilde{B})^{10}}\right] = -0{,}88 - 6{,}94 = -7{,}82$$

și

$$\lg\tilde{B} = 2{,}00 - 0{,}36 = 1{,}64,$$

adică

$$\frac{Q_0}{2\pi\tilde{\varkappa} M(r_0/\tilde{B})^{10}} = 1{,}51\cdot 10^{-8}\,{}^\circ\mathrm{K}$$

$$\tilde{B} = 43{,}65\ \mathrm{m}.$$

Întrucît $\tilde{\varkappa} = 1{,}188$ W/m · °K, $M = 94$ m și $r_0/\tilde{B} = 0{,}10/43{,}65 = 2{,}29095 \cdot 10^{-3}$, urmează că

$$Q_0 = 2\pi \cdot 1{,}188 \cdot 94 \cdot (2{,}29095 \cdot 10^{-3})^{10} \cdot 1{,}51 \cdot 10^{-8} = 4{,}21946 \cdot 10^{-32}\ \text{W}.$$

Bibliografie

ALADIEV, I. T., TRUSOV, V. P., PEREDERY, A. D., STRIGIN, E. M., SAPEROV, E. V., FARDZINOV, V. K. (1975). *Heat and Mass Transfer Processes in Aquifer Systems with Artificially Increased Fracturing*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use for Geothermal Resources, San Francisco, 20—29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1529—1535.

ALBU, M. (1981). *Mecanica apelor subterane*, Cap. 2, p. 32—63, Editura Tehnică, București.

ALBU, M., ENĂCHESCU, D. (1981). *Despre simularea evoluției sistemelor hidrotermominerale subterane*, St. cerc. geol., geofiz., geogr., Geofizică, Tom. 19, p. 143—155, București.

ALBU, M., HINCULOV, A. (1975). *Aspects de la détermination des réserves en eaux minérales*, Simpozionul internațional de ape minerale și termale, Eforie 7—14 iunie 1974, Studii tehnice și economice, Seria E, Hidrogeologie, nr. 12, Inst. de geologie și geofizică, București, p. 27—32.

ALBU, M., PRICĂJAN, A. (1980). *Détermination des paramètres d'un système fissurel hydrothermominéral et prévision de son évolution au cours de l'exploitation*, IV Congresso Internazionale sulle Acque Sotterranee, 17—21 Febbraio 1980, Acireale, V Tema, Problemi inerenti il calcolo e la modellistica di acquiferi fessurati, Catania.

ALDIS, W. S. (1894). In: Proceedings of the Royal Society, vol. LXIV.

ANDREWS, D. J., SLEEP, N. H. (1974). *Numerical modelling of tectonic flow behind island arcs*, Geophys. J. R. Astr. Soc., 38, p. 237—251.

BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHFOOT, E. N. (1960). *Transport Phenomena*, Wiley, New York.

BORIES, S., PODAIRE, A. (1980). *Heat and mass transfer processes associated with reinjection of waste fluids in highenthalpy reservoirs*, 7-ème Symposium international de l'A.I.H.R. — Transfers de chaleur et de masse en milieu poreux, Session VI — Exploitation of geothermal resources, p. 260—261.

BOULTON, N. S. (1954). *Unsteady radial flow to a pumped well allowing for delayed yield from storage*. I.A.S.H. Publ. 37, p. 472—477, Brussels.

BOULTON, N. S. (1963). *Analysis of data from non-equilibrium pumping tests allowing for delayed yield from storage*. Proc. Inst. Civ. Engrs., vol. 26, p. 469—482.

BOULTON, N. S. (1965). *The discharge to a well in an extensive unconfined aquifer with constant pumping rate*, J. of Hydrology, 3, no 2, p. 124—130.

CASTANIER, L., SANYAL, S. K., BRIGHAM, W. E. (1980). *Un modèle semi-analytique pour la simulation de resèrvoirs géothermiques*, 7-ème Symposium international de l'A.I.H.R.—Transfers de chaleur et de masse en milieu poreux, Stanford University, p. 5—6.

CHAN, B. K., IVEY, C. M. (1970). *Natural Convection in Enclosed Porous Media with Rectangular Boundaries*, Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer.

COLLATZ, L. (1960). *The Numerical Treatment of Differential Equations*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin.
COURANT, R., FRIEDRICHS, K. O., LEWY, H. (1928). *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann., **100**, p. 32–74.
DAVIS, E. E., LISTER, C. R. B. (1977). *Heat flow measured over the Juan de Fuca Ridge: Evidence for widespread hydrothermal circulation in a highly heat transportive crust*, J. Geophys. Res., **82**, p. 4845–4860.
DELISLE, G., KAPPELMEYER, O., HAENEL, R. (1976). *Prospests for geothermal energy for space heating in low-enthalpy areas*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, p. 2283–2291.
DE WIEST, R.J. M. (1966). *On the storage coefficient and the equations of ground water flow*, Journal of Geophysical Research, **71**, p. 1117–1122.
DOUGLAS, J. JR. (1956). *On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differntial equations*. SIAM Journal, **4**, p. 20–37.
DOUGLAS, J. JR. (1961). *Survey of numerical methods for parabolic differential equations*. Advances in Computers, **2**, Academic Press, New York.
EMSELLEM, Y. (1971). *Modeles mathématiques pour la gestion integrée des ressources en eau*. Ecole nationale superieure des mines de Paris, Centre d'informatique géologique, Fontainebleau, R/71/6, p. 6–7.
ENĂCHESCU, D., ALBU, M. (1982). *Integrarea numerică a ecuaţiilor de difuzivitate orizontală pentru zăcămintele hidrotermominerale*. Studii şi cercetări matematice, tom. **34**, nr. 2, p. 113–124, Bucureşti.
EVANS, G. W., BROUSSEAU, R. J., KEIRSTEAD, R. (1954). *Instability Considerations for Various Difference Equations Derived from the Diffusion Equation*, UCRL–4476.
FAUST, C. R., MERCER, J. W. (1975). *Mathematical Modeling of Geothermal Systems*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1635–1641.
FORSYTHE, G. E., WASOW, W. R. (1960). *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York.
GARÇON, V. (1981). *Modélisation numérique d'un écosystème aquatique, Application au réservoir de Grangent sur la Loire*, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série A : Nucléaire, Hydraulique, Thermique ; Supplément au no. 3, Rédaction : Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Paris.
GARG, S. K., PRITCHETT, J. W., BROWNELL, D. H. JR. (1975). *Transport of Mass and Energy in Porous Media*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. 3, Section VII, p. 1651–1656.
GODUNOV, S. K., REABENIKII, V. S. (1973). *Raznostnie shemi, Vvedenie v teoriiu*, Izdatelistvo «Nauka».
GRAY, A., MATHEWS, G. B. (1958). *Funcţiile Bessel şi aplicaţiile lor în fizică* (trad. din limba engleză după ediţia a doua, revăzută de A. Gray şi T. M. Macrobert), Editura tehnică, Bucureşti.
GRINGARTEN, A. C., SAUTY, J. P. (1975). *Influence de la réinjection sur la température d'un réservoir géothermique utilisé pour le chauffage urbain*, Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, 20–29 May 1975, vol. II, Section V, p. 1365–1370.
HANTUSH, M. S. (1956). *Analysis of data from pumping tests in leaky aquifers*, Trans. Am. Geophys. Union, **37**, 6, p. 702–714.
HANTUSH, M. S. (1959). *Non steady flow to flowing wells in leaky aquifers*, Journal of Geophysical Research vol. **64**, p. 1043–1052.

HANTUSH, M. S. (1960). *Modification of the theory of leaky aquifers,* Journal of Geophysical Research vol. 64, p. 3713–3725.

HANTUSH, M. S. (1964). In : Advances in Hydroscience (ed. V. T. Chow), 1, *Hydraulics of wells,* p. 281–432, Academic Press, New York.

HANTUSH, M. S. (1966). *Analysis of Data from Pumping Tests in Anisotropic Aquifers,* Journal of Geophysical Research vol. 71, no. 2, p. 421–426.

HANTUSH, M. S., JACOB, C. E. (1954). *Plane potential flow of groundwater with linear leakage,* Trans. Am. Geophys. Union, 35, p. 917–936.

HANTUSH, M. S., JACOB, C. E. (1955). *Nonsteady radial flow in an infinite leaky aquifer and nonsteady Green's functions for an infinite strip of leaky aquifer,* Trans. Am. Geophys. Union, 36, p. 95–112.

HELGESON, H. C., KIRKHAM, D. H. (1974). *Theoretical prediction of the thermodynamic behavior of aqueous electrolytes at high pressures and temperatures, 1, Summary of the thermodynamic/electrostatic proprieties of the solvent,* Amer. J. Sci., 274, p. 1089–1198.

HOFFERS, B. (1981). *A model for hydrothermal convection in the Rhine graben and its tectonic implications,* Tectonophysics, 73, p. 141–149, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

HOLST, P. H., AZIZ, K. (1972). *Transient Three-dimensional Natural Convection in Confined Porous Media,* International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15.

HOUPEURT, A. (1958). *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux,* Société des éditions techniques, Paris.

HUBBERT, M. K. (1940). *The theory of ground-water motion,* J. Geol., 48, p. 785–944.

HURTIG, E. (1975). *Untersuchungen zur Wärmeflussverteilung in Europa,* Gerlands Beitr. Geophys., 84, p. 247–260.

ISAACSON, E., KELLER, H. B. (1966). *Analysis of Numerical Methods,* Chap. 9, 4, p. 501–529, John Wiley and Sons, Inc., New York–London–Sydney.

ISHERWOOD, J. G. (1904). In : Memoirs of the Manchester Philosophical Society, vol. XLVIII.

JACOB, C. E. (1950). In : Engineering Hydraulics (ed. H. Rouse), Chap. 5, p. 321–386, John Wiley and Sons, New York.

KAPPELMEYER, O. (1968). *Beiträge zur Erschliessung von Thermalwässern und natürlichen Dampfvorkommen,* Geol. Jahrb., 85, p. 783–808.

KAPPELMEYER, O. (1979). In : Terrestrial Heat Flow in Europe (ed. V. Cermák and L. Rybach), *Implications of Heat Flow Studies for Geothermal Energy Prospects,* p. 126–135, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

KASSOY, D. R., ZEBIB, A. (1975). *Variable viscosity effects on the onset of convection in porous media,* Phys. Fluids, 18, p. 1649–1651.

LANDAU, L., LIFCHITZ, E. (1971). *Mécanique des fluides* (traduit du russe), Physique théorique, tome VI, Chap. V, p. 266–270, Éditions Mir, Moscou.

LASSETER, T. J., WITHERSPOON, P. A. (1975). *La simulation numérique du transfert de chaleur et de masse dans les réservoirs géothermiques multidimensionnels biphasiques,* Hydrogéologie, géologie de l'ingénieur, Bulletin du B.R.G.M., Deuxième serie, Section III, no. 1, Éditions B.R.G.M., Paris.

LAWTON, R. G., MURPHY, H. D., TESTER, J. W., McFARLAND, R. D. (1980). *Geothermal reservoir modeling,* 7-ème Symposium international de l'A.I.H.R. – Transfers de chaleur et de masse en milieu poreux, Stanford University, p. 116–143.

LAX, P. (1965). *Numerical solution of partial differential equations*, Amer. Math. Monthly, **72**, no. 2, part II, p. 74–84.

LEE, W. H. K., MAC DONALD. G. J. F. (1963). *The global variation of terrestrial heat flow*, J. Geophys. Res., **68**, p. 6481–6492.

LOWELL, R. (1975). *Circulation in fractures, hot springs, and convective heat transport on mid-ocean ridge crests*, Geophys. J. R. Astron. Soc. **40**, p. 351–365.

LUBIMOVA, E. A., LYUBOSHITS, V. M., NIKITINA, V. N. (1976). In : Geoelectric and Geothermal Studies (East-Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph (ed. A. Adám), *Effect of contrasts in the physical properties on the heat flow and electromagnetic profiles*, p. 72–99, Akadémiai Kiadó, Budapest.

LUBIMOVA, E. A., NIKITINA, V. N. (1975). *On heat flow singularities over mid-ocean ridges*, J. Geophys. Res., **80**, p. 232–243.

LUIKOV, A. V. (1966). *Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies*, Pergamon Press.

LUIKOV, A. V., MIKHAYLOW, E. (1961). *Theory of Energy and Mass Transfer*, Prentice Hall.

McFARLAND, R. D., MURPHY, H. D. (1976). *Extracting Energy from Hydraulically-Fractured Geothermal Reservoirs*, 11th Intersociety Energy Conversion Engineering Conference, State Line, Nevada, Septembre 12–17.

MUSKAT, M. (1946). *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, Edwards, Ann Arbor, Michigan.

PEACEMAN, D. W., RACHFORD, H. H. JR. (1955). *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, SIAM Journal, **3**, p. 28–41.

POLUBARINOVA-KOCINA, P. IA. (1952). *Teoria dvijenia gruntovîh vod*, Gosudarstvennoe izdatelistvo tehnico-teoreticeskoi literaturî, Moskva.

RENNER, J. L., WHITE, D. E., WILLIAMS, D. L. (1975). In : Assessment of Geothermal Resources of the United States – 1975 (ed. D. E. White and D. L. Williams), *Hydrothermal convection systems*, p. 5–57, U. S. Geol. Surv. Circ. **726**.

RICHTMYER, R. D. (1957). *Difference Methods for Initial Value Problems*, Interscience, New York.

RUMER, R. R. JR. (1969). In : Flow through porous media (ed. R. J. M. De Wiest), Chap. 3, Academic Press, New York and London.

SCHNEEBELI, G. (1955). *Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration*, La Houille Blanche, **10** (2), 141.

STALLMAN, R. W. (1962). *Boulton's integral for pumping test analysis*, United States Geol. Survey, Prof. paper, **424**–C, C24–29.

STRAUS, J. M., SCHUBERT, G. (1977). *Thermal Convection of Water in a Porous Medium : Effects of Temperature-and Pressure – Dependent Thermodynamic and Transport Properties*, Journal of Geophysical Research, vol. **82**, no. 2, p. 325–333.

SUNADA, D. (1965). *Turbulent flow through porous media*, Water Ressources Center Contrib., no. **103**, Univ. of California, Berkeley.

SUTER, V. E. (1980). *The Application of Petroleum Engineering to Geothermal Development*, Journal of Petroleum Technology, vol. **32**, no. 1, p. s–w.

TRUESDELL, A. H., WHITE, D. E. (1973). *Production of superheated steam from vapor-dominated geothermal reservoirs,* Geothermics 2, p. 154–175.

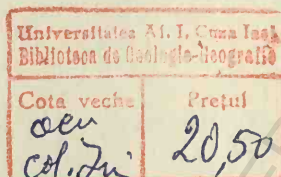
VAN EVERDINGEN, A. F., HURST, W. (1969). *Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs,* Trans. AIME 186, 305.

WANG, C. Y. (1963). *On the distribution of surface heat flow and the second-order variations in the external gravitational field,* Smithsonian Astrophys. Obs., Spec. Rept. 134.

WARD, J. (1964). *Turbulent flow in porous media,* J. Hydraulics Div., Am. Soc. Civil Engrs. 90 (5), 1.

WERNER, D., BALKE, K. D. (1978) *Geothermal model for the rise of deeper groundwater along faults in unconsolidated rocks,* Annales Instituti Geologici Publici Hungarici, vol. LIX, fasc. 1–4, p. 801–809, Müszaki Könyvkiadó, Budapest.

* * * (1889, 1893, 1896). Reports of the British Association.



Lei 20,50

Am scris prezenta carte de inițiere cu speranța că voi reuși să trezesc interesul specialiștilor noștri pentru punerea și rezolvarea problemelor de termodinamică a crustei terestre, într-o asemenea măsură încît să asigure prioritate științei românești într-un domeniu de mare interes pe plan mondial.



EDITURA TEHNICA